UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Problema 1: Demostrar la existencia y unicidad de un punto fijo de la función

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

en el intervalo $[-2, -\frac{1}{2}]$. Aplicar el algoritmo del punto fijo partiendo en $x_0 = -2$ hasta completar dos iteraciones.

Existencia: Tenemos que mostrar que $g(x) \in [-2, -\frac{1}{2}]$ $\forall x \in [-2, -\frac{1}{2}]$.

Para esto notamos que $g'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$ $\forall x \neq 2$.

Por lo tanto $g(x)$ es decreciente ($a \leq b \Rightarrow g(b) \geq g(a)$) y de esta forma $-\frac{6}{5} = g(-\frac{1}{2}) \leq g(x) \leq g(-2) = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ $-2 \leq g(x) \leq -\frac{1}{2}$ $\forall x \in [-2, -\frac{1}{2}]$.

Unicidad: Tenemos que estudiar si existe $0 < K < 1$ tal que $|g'(x)| < K$. Recordemos que

$g'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{3}{(x-2)^2} =: f(x)$

Notamos que $f'(x) = -\frac{6}{(x-2)^3} > 0$ $\forall x \in [-2, -\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow f(x)$ creciente $\Rightarrow \frac{3}{16} = f(-2) \leq f(x) \leq f(-\frac{1}{2}) = \frac{12}{25}$

$\Rightarrow |g'(x)| = f(x) \leq \frac{12}{25} =: K < 1$. $\forall x \in [-2, -\frac{1}{2}]$

Por lo tanto existe un único punto fijo.