UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MÉTODOS NUMÉRICOS 220138: LISTADO 4

1. Calcule el polinomio lineal de mínimos cuadrados para los siguientes datos

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	1.000	1.284	1.6487	2.117	2.7183

2. Obtener la aproximación polinomial cuadrática de mínimos cuadrados a $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 2]$. Dar el valor del error.

3. Para cortar planchas metálicas de diferentes espesores se utiliza un soplete. La siguiente tabla muestra el tiempo t necesario para cortar una pulgada de distintos espesores e (pulgadas).

e (pulgadas)	1	2	3	4	5
$f(e)$ (mín)	0.046	0.059	0.072	0.084	0.100

Hallar la expresión que mejor aproxima, según el criterio de los mínimos cuadrados, a los valores de la tabla, utilizando como base $\{1, x, 2x^2 - 1\}$. Además, utilizando dicha expresión, estime el valor de $2,5$ pulgadas.

4. Obtener la aproximación polinomial lineal de mínimos cuadrados a $f(x) = x\,ln(x)$ en el intervalo $[1, 3]$. Dar el valor del error.

5. Obtener la mejor aproximación polinomial cuadrática, en el sentido de mínimos cuadrados, que representa a los puntos

α	0	5	10	15	20
$K(\alpha)$	1.5707	1.5678	1.5588	1.5441	1.5238

6. Se desea ajustar por mínimos cuadrados los datos $\{(-1, \frac{1}{e}), (0, 1), (1, e)\}$, para ello propone el modelo
$$y = \frac{e^{x\sqrt{a}}}{\sqrt{b} - 1}$$
Determine el valor de las constantes a y b que ajustan el modelo.

7. Se desea ajustar por mínimos cuadrados los datos $\left\{(0, \frac{1}{e^2+1}), (1, \frac{1}{1+e}), (2, \frac{1}{2})\right\}$, para ello se propone un modelo llamado sigmoidal:
$$y = \frac{1}{1 + \exp(-\beta_0 - \beta_1 x)}$$
donde exp es la función exponencial. Determine el valor de las constantes β_0 y β_1 que ajustan el modelo sigmoidal.

8. Se desea ajustar por mínimos cuadrados los datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$, para ello proponen los siguientes modelos

   a) $y = \dfrac{b}{ax+1}$ c) $y = bxe^{ax}$ e) $y = \arccos\left(1 + \dfrac{b}{ax+1}\right)$

   b) $y = \dfrac{1}{(ax+b)^3}$ d) $y = \dfrac{1}{1+be^{ax}}$ f) $y = \dfrac{1}{a\sinh(x) + b\tanh(x)}$.

   Para cada uno de los modelos, escriba las ecuaciones normales asociadas.

9. Considere la siguiente tabla de datos para una función f:

x	-1.0	0.0	1.0
$f(x)$	0.0	1.0	4.0

   (a) Determine mediante interpolación de Lagrange el polinomio de grado 2 que interpola la tabla de datos.

10. Considere la siguiente tabla de datos para una función f:

x	-1.0	0.0	0.5	2.0
$f(x)$	3.00	2.00	2.25	6.00

   (a) Determine mediante interpolación de Lagrange el polinomio de grado 3 que interpola la tabla de datos.

   (b) Incorpore a la tabla el par $(x, f(x)) = (3.0, 7.00)$ y obtenga un polinomio interpolante de grado 4. Evalúe este polinomio en $x = 1$.

11. Construir el polinomio de interpolación de Lagrange para $f(x) = e^{4x}\sin(2x)$ usando la partición $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.6$. Dar el valor de la aproximación en $x = 0.2$

12. Un estudiante de cálculo numérico realiza un recorrido en un automóvil por una carretera recta y se controla su recorrido en varios puntos. Los datos recolectados de las observaciones se incluyen en la siguiente tabla

Tiempo (segundos)	0	3	5	8	13
distancia (pies)	0	225	383	623	993
velocidad (pies/seg)	75	77	80	74	72

   Use el polinomio de interpolación de Lagrange para predecir la posición y su velocidad en el tiempo $t = 10$ seg.

13. Una alumna de cálculo numérico tiene un problema filosófico. Sospecha que las elevadas concentraciones de tanina en las hojas de los robles maduros inhiben el crecimiento de las larvas de la polilla invernal que tanto dañan a los árboles en algunos años. Para responder su sospecha consiguió la tabla anexa, que contiene el peso promedio de dos muestras de larva, tomadas en los primeros 28 días después del nacimiento. La primera se crió en hojas de robles jóvenes, mientras que la segunda lo hizo en hojas maduras del mismo árbol.

(a) Use la interpolación de Lagrange para aproximar la curva del peso promedio de las muestras;

(b) Para calcular un peso promedio máximo aproximado de cada muestra, determine el máximo del polinomio interpolante.

Día	0	6	10	13	17	20	28
Peso promedio de la muestra 1 (mg)	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
Peso promedio de la muestra 2 (mg)	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

14. Considere la siguiente función por tramos:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + A(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3, & x \in [1,2] \\ S_1(x) = \frac{1}{2} + B(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 - C(x-2)^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

determine los coeficientes A, B y C de modo que la función anterior sea una spline cúbica con condiciones de borde: $S'(1) = S'(3) = 0$. Nótese que las condiciones de borde son **distintas** a las llamadas "naturales".

15. Un trazador cúbico sujeto s, de una función f está definido por

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ s_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Obtenga $f'(0)$ y $f'(2)$.

16. Se dispone de los puntos $\{(x_0, 2), (x_1, 1), (x_2, 4)\}$ y se sabe que los polinomios de Lagrange asociados a dichos puntos satisfacen:

$$\begin{aligned} \ell_0'(x) &= x - \frac{1}{2} \\ \ell_1(x) &= 1 - x^2 \\ \ell_2''(x) &= 1 \end{aligned}$$

Observación: note la primera derivada en $\ell_0(x)$ y la segunda derivada en $\ell_2(x)$.

Determine los valores de x_0, x_1, x_2 y el polinomio que interpola dichos datos.

17. Muestre que no existen constantes a, b, c de tal manera que la función

$$s'(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + b, & -1 \le x \le 1 \\ cx^2 - 2x + 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sea la derivada de una Spline cúbica natural, que pasa por los puntos $\{(-1, y_0), (1, y_1), (2, y_2)\}$, donde y_0, y_1 e y_2 son valores reales arbitrarios.

18. Encontrar el interpolante spline cubico natural de f en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ donde $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$.