UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Métodos Numéricos: Sistema de Ecuaciones Lineales

1. Considere los sistemas lineales (que tienen la misma matriz de coeficientes).

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   (a) Resuelva los sistemas aplicando eliminación gaussiana a la matriz aumentada.
   (b) Resuelva los sistemas encontrando la inversa a la matriz asociada a ellos.
   (c) ¿Cuál método requiere más operaciones?

2. Resuelva los siguientes sistemas lineales.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Considere las siguientes matrices. Encuentre la matriz de permutación **P**, tal que **PA** se puede factorizar en el producto **LU**.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4. Obtenga factorizaciones de la forma $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^t\mathbf{L})\mathbf{U}$ para las siguientes matrices.

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

5. Utilice el ejercicio anterior para resolver los sistemas de ecuaciones

   (a) $\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

   (b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$

6. Se quiere resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$.

   (a) Factorice $\mathbf{A}$ como $(\mathbf{P^t L})\mathbf{U}$ con estrategia de pivoteo parcial. Indique las matrices $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{P}$. Encuentre la solución $\mathbf{x}$ mediante este método.

   (b) Encuentre el vector solución $\mathbf{x}$ por el método de eliminación Gaussiana (sin pivoteo parcial).

7. Obtenga la factorización $\mathbf{LU}$ de las siguientes matrices.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 14 & 25 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & -10 & 7 \\ 0 & -1 & -4 & 20 \end{bmatrix}$

8. Considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

   (a) Compruebe que se puede resolver mediante el método $\mathbf{LU}$.

   (b) Haga la factorización $\mathbf{LU}$ de la matriz $\mathbf{A}$ del sistema.

   (c) Encuentre la solución única del sistema.

9. Determine cuales de las siguientes matrices son (i) simétricas, (ii) singulares, (iii) diagonal dominante estricta, (iv) definida positiva.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 3/2 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

10. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

11. Decida si las matrices son simétricas y definidas positivas. En caso afirmativo obtenga la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{LL^t}$.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & -1 \\ -3 & 6 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

12. Obtenga los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que la matriz sea definida positiva.

(a) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

13. Se necesita aplicar la factorización de Cholesky a la matriz: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & k-1 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que se garantice la existencia de la factorización de Cholesky.

   (b) Realice la factorización de Cholesky $\mathbf{A} = \mathbf{LL^t}$.

14. Resuelva los sistemas utilizando la factorización de Cholesky $\mathbf{A} = \mathbf{LL^t}$.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$ y $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$ y $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 &= 5 \end{aligned}$

15. Considere la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$ definidos por: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 30 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

   (a) Fundamente por qué es posible efectuar la factorización de Cholesky de la matriz $\mathbf{A}$ y realícela.

   (b) Realice la factorización $\mathbf{LU}$ de la matriz $\mathbf{A}$.

   (c) Encuentre el vector solución $\mathbf{x}$ por alguno de estos dos métodos.

16. Resuelva los sistemas utilizando el método de Thomas.

(a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -1 \\ 6x_2 + 7x_3 &= -6 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= -5 \\ 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 8x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 25 \\ 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 5 \\ 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$

17. Considere la matriz

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Muestre que si $m \geq 0$, entonces $||M||_2 = ||M||_\infty = ||M||_1$.

18. Decida cuáles de las siguientes matrices son definidas positivas y cuáles de ellas son de diagonal dominante estricta.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 2 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 30 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \\ 6 & -4 & 14 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 11 & 6 & -1 \\ -2 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 30 \end{bmatrix}$

19. Se necesita aplicar el método de Gauss-Seidel a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & k-1 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

(a) ¿Es posible encontrar un valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que se garantice la convergencia del método?

(b) Escriba el esquema de la forma $x^{(k)} = T_J x^{(k-1)} + c,\ k = 1, 2, \ldots$ identificando de forma explícita los valores de T_G y c.

20. Muestre que el método de Gauss-Seidel es convergente para los siguientes sistemas y luego realice dos iteraciones del mismo, partiendo del vector $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

21. Se necesita aplicar el método de Jacobi a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & k & 1 \\ 2 & 6 & k \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

(a) ¿Es posible encontrar un valor de $k \in \mathbb{N}$ de modo que se garantice la convergencia del método?

(b) Escriba el esquema de la forma $x^{(k)} = T_J x^{(k-1)} + c,\ k = 1, 2, \ldots$ identificando de forma explícita los valores de T_J y c.

22. Muestre que el método de Jacobi es convergente para los siguientes sistemas y luego realice dos iteraciones del mismo, partiendo del vector $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$.

(a) $$\begin{array}{rcr} 3x_1 - x_2 - x_3 &=& 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &=& -1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &=& 2 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 - x_3 &=& 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &=& 3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 &=& 0 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 &=& 6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &=& -4 \\ -x_2 + 3x_3 &=& 5 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcr} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &=& 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &=& 0 \end{array}$$

23. Determine el radio espectral de las siguientes matrices.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

24. El sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

tiene la solución $(1, 2 - 1)^t$.

(a) Muestre que $\rho(T_J) = 0$.

(b) Use el método de Jacobi usando como vector inicial al vector nulo. Detenga las iteraciones cuando la norma infinito del "error" sea menor que 10^{-2}.

(c) Muestre que $\rho(T_G) = 2$.

(b) Muestre que el método de Gauss-Seidel, aplicado como en (b), no da una buena aproximación después de algunas iteraciones.