UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MÉTODOS NUMÉRICOS 220138: LISTADO 2

1. Aplicar el método de bisección, para encontrar las soluciones de la ecuación $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ en el intervalo $[0,\ 1]$, con una aproximación de 10^{-5}.

2. Encontrar una aproximación de $\sqrt[3]{25}$, con un error de aproximación menor a 10^{-4}, usando el algoritmo de bisección. [*Sugerencia:* Considere $f(x) = x^3 - 25$].

3. Usar el método de bisección para hallar una raíz positiva de la ecuación $2x = \tan(x)$. ¿Cuántos pasos hay que hacer para garantizar que el error sea menor que 10^{-5}?.

4. Usando el método de bisección, hallar una aproximación de la solución de la ecuación $e^x \sin(x) = 1$, en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, con un criterio de detención dado por $\epsilon = 0,01$.

5. La ecuación $\sqrt{x} - \cos(x) = 0$ tiene una raíz en $[0, 1]$. Determinar cuántas iteraciones se deben realizar en el método de la bisección, para obtener una aproximación con un error menor a $\epsilon = 10^{-5}$. Muestre cinco iteraciones del método.

6. Probar que la función $g(x) = 2^{-x}$ tiene un punto fijo en el intervalo $[1/3,\ 1]$. Utilizar la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación con cuatro decimales dedondeados de dicho punto fijo, y hallar una cota del error cometido en dicha aproximación.

7. Hallar un intervalo $[a, b]$, en el cual se pueda asegurar la convergencia del método de punto fijo, aplicado a la ecuación $x = 5^{-x}$.

8. Aplicar el método de iteración de punto fijo para determinar una solución, con una exactitud de 10^{-2}, para la ecuación $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ en $[1, 2]$. Utilizar $p_0 = 1$.

9. Determinar, si el esquema de punto fijo aplicado para hallar $x \in \mathbb{R}$, tal que $x = g(x)$, con $g(x) = \sqrt{\frac{e^{-x}}{3}}$, converge para cualquier dato inicial $x_0 \in [0, 1]$. Explicar la repuesta dada.

10. Mediante cálculos algebraicos muestre que las siguientes funciones tienen un punto fijo en p cuando $f(p) = 0$, donde $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

    a) $g_3(x) = \left(\dfrac{3+x}{x^2+2}\right)^{1/2}.$

    b) $g_2(x) = \left(\dfrac{3+x-x^4}{2}\right)^{1/2}.$

    c) $g_4(x) = \dfrac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1}.$

    d) $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}.$

    Cual de las funciones es la más adecuada para utilizar el algoritmo de punto fijo?.

11. Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{8x-1}{x} - e^x$.

    (a) Dibujar la gráfica de f y determinar el número de raíces de la ecuación $f(x) = 0$, localizando cada raíz entre dos enteros consecutivos.

(b) Para cada una de las siguientes funciones:

$$g_1(x) = \frac{1}{8}(1 + xe^x)\,, \qquad g_2(x) = \ln\left(\frac{8x-1}{x}\right)$$

considerar el método iterativo:

$$x_{n+1} = g_i(x_n), \qquad n = 1, 2, \cdots, \infty, \quad i = \{1,\, 2\},$$

comenzando en $x_0 = 1$.
Estudiar si estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de $f(x) = 0$.

12. Determinar el valor de $m \in \mathbb{R}$, tal que el método de punto fijo

$$p_n = \frac{p_{n-1}(mp_{n-1}^2 - m + 1)}{(m+1)(p_{n-1}^2 - 1)}\,, \quad n \geq 1$$

converja, a lo menos con orden 2, a $p = \sqrt{2}$, comenzando las iteraciones en $p_0 = 1.5$.

13. Considerar que A es un número positivo y $x_0 > \sqrt{A}$. Demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}}\,, \qquad n \geq 1$$

converge a $A^{1/2}$.

14. Justificando adecuadamente, demostrar que la iteración de punto fijo $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$ para $n \geq 1$, converge a $2^{1/2}$ cuando $x_0 > 2^{1/2}$.

15. Realizar 5 iteraciones de Newton-Raphson para intentar encontrar un cero de la función $f(x) = x^2 - x + 1$, con un valor inicial $x_0 = 1$. ¿Qué puede concluir respecto a la convergencia del método?. Fundamentar la respuesta dada.

16. Aplicar el método de Newton-Raphson, para encontrar una solución positiva de la ecuación $x = \cos(x)$, con un error de aproximación inferior a 10^{-4}.

17. La función $f(x) = x - \cos(x)$ tiene una raiz en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Aproximar dicha raíz usando el esquema de Newton-Raphson.

18. Utilizar el método de Newton-Raphson, para determinar una aproximación de la solución positiva (*mayor que cero*) más pequeña de la ecuación $\tan(x) = x$. Usar como criterio de detención, que el error sea menor a 10^{-4}.

19. Se considera la función $f(x) = x^5 + 2x$. Mediante la aplicación del método de Newton-Raphson, hallar el menor número positivo (con tres cifras decimales de aproximación), para el cual $f(x) = 4$.

20. Aplicar el método de Newton-Raphson, para llegar a la siguiente expresión:

$$x_{n+1} = \frac{1}{r}\left((r-1)x_n + \frac{a}{x_n^{r-1}}\right),$$

la cual describe la raiz $r-$ésima de un número a.

21. Resolver los problemas 15. y 18. aplicando el método de la Secante. Posteriormente, con base en los resultados obtenidos, concluir cual de los dos métodos converge más rapidamente.

22. Utilizar el método de la secante para hallar una raiz positiva de la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$, utilizando en los cálculos cuatro cifras decimales por redondeo, e iterando hasta alcanzar una aproximación de $|x_n - x_{n-1}| \leq 0.1 \cdot 10^{-2}$.

23. En el método de la secante, la aproximación x_3 se obtiene como el punto de intersección del eje X con la recta secante que pasa por:

    a) $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$;
    b) $(x_0, f(x_0))$ y $(x_2, f(x_2))$;
    c) $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$;
    d) ninguna de las anteriores.

24. Usar la versión generalizada a varias variables del método de Newton-Raphson para resolver el sistema de ecuaciones:
$$2x - 3y = 0\,, \qquad x^2 - y^2 - 3 = 0,$$
comenzando con valores iniciales $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

25. Se desea encontrar un punto de intersección de las curvas
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y^3 + y - x^2 - x = 0 \end{cases}.$$
Indicar cual es el algoritmo que se obtiene al aplicar el método de Newton, a partir de un dato inicial (x_0, y_0).

Ejercicios para Matlab

26. Hacer un programa MATLAB que ejecute los primeros 20 pasos de los métodos de secante para hallar una raíz de la ecuación $2x^3 + x - 2 = 0$ comenzando con el intervalo $[0, 1]$.Indicación: La descripción de los métodos se encuentra en el texto guía.

27. Hacer un programa MATLAB que ejecute los primeros 20 pasos de los métodos de bisección, Newton-Raphson y secante para calcular $\sqrt[3]{2}$, comenzando con valores iniciales apropiados.

28. Se quiere resolver la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = e^x - 2$. Calcular los 10 primeros términos de las sucesiones generadas por los métodos de Newton-Raphson y de la secante, comenzando con los valores iniciales $x_1 = 3$ para el primer método, e $x_1 = 3$, $x_2 = 2.3$ para el segundo. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.

29. Utilizar Matlab para graficar cada una de las funciones del ejercicio 1., y decidir cuantas raíces hay dentro del intervalo $[-5,\ 10]$ para cada una de ellas.

30. Hacer un programa MATLAB para resolver los ejercicios 27 y 28, considerando criterios de detención adecuados.