UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Métodos Numéricos 220138: LISTADO 1

1. Halle los siguientes límites de sucesiones:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^3-2n-2}{n^3+2n^2+1}$ (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n+2}-n)$ (e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{n^3+1}$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+10}}$ (f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4+n}{n+1}\right)^{n+1}$

RESULTADOS ÚTILES: (1) Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión. Si $\alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = L < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

2. Halle los siguientes límites de funciones:

(a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x^6-4096}{x+4}$ (e) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{1-\sqrt{x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(8x)}{\sin(7x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to0} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

3. Considere la evaluación: $e = \sqrt{a^2+b^2}$. ¿Cómo se puede organizar el cómputo de a^2+b^2 para valores grandes de a y b de manera que se evite el desbordamiento (overflow)?

4. Calcular el valor del polinomio utilizando un esquema que reduzca el número de multiplicaciones y sumas. $P(x) = 2x^3+3x^2-2x+1$ en $x=1$ (ver Burden-Faires).

5. Que problemas puede preveer al resolver la ecuación cuadrática

(a) $x^2-10^6x+1=0$ (b) $10^{-10}x^2-10^{10}x+10^{10}=0$

usando la conocida fórmula $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ¿Qué remedio puede sugerir? Resuelva las ecuaciones con su remedio (ver Bibliografía).

6. Calcule el error absoluto y relativo en las aproximaciones de p mediante p^*:

(a) $p=\pi$, $p^*=\frac{22}{7}$ (c) $p=e$, $p^*=2.718$

(b) $p=\pi$, $p^*=3.1416$ (d) $p=\sqrt{2}$, $p^*=1.414$

7. Los lados de un rectángulo son $4.02\pm0.01\,m$ y $4.96\pm0.01\,m$. Hallar el área del rectángulo.

8. La deflexión y de un mástil en un bote es de $y=\frac{FL^4}{8EI}$ donde F =carga uniforme (lb/pie), L =altura (pies), E =módulo de elasticidad (lb/pie^2), e I =momento de inercia (pie^4). Calcular el error en y dados los siguientes datos: $\tilde{F}=50$, $\Delta\tilde{F}=2$; $\tilde{L}=30$, $\Delta\tilde{L}=0.1$; $\tilde{E}=1.5\times10^8$, $\Delta\tilde{E}=0.01\times10^8$; $\tilde{I}=0.06$, $\Delta\tilde{I}=0.0006$.

9. Al medir el radio R de un círculo con una exactitud hasta $0.5\,cm$ se obtuvo $12\,cm$. Hallar el error absoluto y relativo al calcular el área y perímetro de la circunferencia.

10. La base de un cilindro tiene radio $R \approx 2\,m$, y su altura $H \approx 3\,m$. ¿Con qué errores absolutos deben determinarse R y H de forma que el volumen V pueda calcularse con un error absoluto de $0.1\,m^3$, sabiendo que la contribución del error de la base es el cuadrado del error de la altura (es decir $\varepsilon_R = \varepsilon_h^2$).

11. Al evaluar la función $u(x,y) = ln(x^2+y^2) + \frac{x}{y}$ en x =2.05$\pm\varepsilon_x$ e y =1.59$\pm\varepsilon_y$, se obtiene un error relativo δ_u =0.087. Determine ε_x y ε_y, si se sabe que ε_x=2ε_y.

12. La fórmula que modela el flujo de agua en un vertedero está dada por

$$Q = 3.33(b - 0.2h)h^{3/2}$$

donde Q es la cantidad de agua que fluye medida en $\frac{m^3}{seg}$, b es el ancho del vertedero y h es el desnivel, ambos con unidad de medida m. Además se sabe que $b = 3\,m$, $h = 1.2\,m$ y que ambas mediciones tienen un error del 2%. Para dar una primera visión y simplificar, se considera que los factores 3.33 y 0.2 no tienen error. Se pide calcular el valor aproximado del flujo Q y cotas para su error absoluto y relativo, considerando las simplificaciones hechas anteriormente.

13. Calcular el valor de la función $u(x,y) = \sin(2x^2 - y)$ en $x = 4.02 \pm 0.01\,m.$ y $y = 4.96 \pm 0.001\,m.$

14. Calcular el valor de la función $u(x,y) = 2xy - \frac{y^2}{x}$ en $x = 2.03 \pm 0.025\,m.$ y $y = 3.06 \pm 0.001\,m.$

15. Determine la rapidez de convergencia de las siguientes sucesiones cuando $n \to \infty$:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 2n^2 - n + 1}{1 + n^5}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{n}$;

16. Determine las razones de convergencia de las siguientes funciones cuando $h \to 0$:

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$;

(b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1 - \cos(h)}{h} = 0$;

(c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h) - h\cos(h)}{h} = 0$;

(d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1 - e^{-h}}{h} = 1$;

(e) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$;

(f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - e^{-h}}{h} = 2$.

17. Determine la rapidez de convergencia de la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $\alpha_n = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

18. Sea $f(x) = x^3$.

(a) Determine el segundo polinomio de Taylor $P_2(x)$ en torno a $x_0 = 0$;

(b) Calcule $R_2(0.5)$ y el error al usar $P_2(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$;

(c) Determine el segundo polinomio de Taylor $P_2(x)$ en torno a $x_0 = 1$;

19. Determine el tercer polinomio de Taylor $P_3(x)$ para la función $f(x) = (x-1)\ln x$ en torno a $x_0 = 1$.

    (a) Use $P_3(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$. Determine una cota superior para el error $|f(0.5) - P_3(0.5)|$, y compárelo con el error real;

    (b) Calcule una cota para el error $|f(x) - P_3(x)|$ que se comete al usar $P_3(x)$ para aproximar $f(x)$ para un x cualquiera en el intervalo $[0.5, 1.5]$;

    (c) Aproxime $\displaystyle\int_{0.5}^{1.5} f(x)dx$ usando $\displaystyle\int_{0.5}^{1.5} P_3(x)dx$.

20. Sean $f(x) = e^x$ y $x_0 = 0$. Determine el n-ésimo polinomio de Taylor $P_n(x)$ para que $f(x)$ en torno a x_0. Determine un valor de n necesario para que $P_n(x)$ aproxime a $f(x)$ hasta 10^{-6} en $[0, 0.5]$.

Ejercicios para Matlab

21. Considere las siguientes sucesiones $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$

    (a) $\alpha_n = \sqrt[n]{3}$ (b) $\alpha_n = \dfrac{n}{2^n}$ (c) $\alpha_n = \left(\dfrac{4+n}{n+1}\right)^{n+1}$

    Para cada sucesión, haga un programa de Matlab que grafique los 50 primeros elementos. Grafique además los 50 primeros elementos de $|\alpha_n - L|$, donde L es el límite de cada sucesión.

22. Considere las siguientes funciones $f(x)$:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{x^6 - 4096}{x+4}$ (b) $f(x) = \dfrac{\sin(8x)}{\sin(7x)}$ (c) $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

    Para cada función, haga un programa de Matlab que grafique la función en el intervalo [-2,2]. Grafique además la función $g(x) = |f(x) - L|$, donde $L = \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

23. Determine gráficamente en Matlab intervalos que contengan soluciones de las siguientes ecuaciones:

    (a) $x - 3^{-x} = 0$ (b) $\cos(x) - x = 0$

24. Considere la función $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Construya alrededor de $x_0 = 0$ los polinomios de Taylor $P_0(x), P_2(x), P_4(x)$ y $P_6(x)$.

    (a) Grafique en un mismo gráfico $f(x)$ y $P_0(x)$;

    (b) Grafique en un mismo gráfico $f(x)$ y $P_2(x)$;

    (c) Grafique en un mismo gráfico $f(x)$ y $P_4(x)$;

    (d) Grafique en un mismo gráfico $f(x)$ y $P_6(x)$.