Métodos Numéricos 220138

Solución numérica de problemas de valor inicial mediante *ode45*

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Para resolver la ecuación,

$$y' = f(t, y) \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = y_0.$$

MATLAB dispone de varias funciones para resolver mediante metodos numéricos ecuaciones diferenciales ordinarias: *ode23*, *ode45*, *ode113*. Para los siguientes problemas elegiremos *ode45*.
Su sintaxis corta es la siguiente

[t,y]=ode45(odefun,t,y0)

donde $t = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ es una discretización de $[a, b]$ e $y = [y_0, y_1, \ldots, y_n]$ es un vector tal que $y(t_i) \approx y_i$. *odefun* es el nombre de la función f (definida por *inline* o @) e $y0$ es el valor inicial.

Ejemplo: Para resolver la ecuación

$$y' = \frac{2 - 2ty}{t^2 + 1} \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1,$$

procedemos de la siguiente forma en la ventana de comando

```
>> t=0:0.2:2;
>> f=@(t,y) (2-2*t*y)/(t^2+1);
>> [t,y]=ode45(f,t,1);
>> plot(t,y,'-o')
```

si deseamos comparar con la solución exacta $y(t) = (2t + 1)/(t^2 + 1)$ agregamos

```
>> hold on
>> fplot('(2*t+1)/(t^2+1)',[0,2]);
>> xlabel('t')
>> ylabel('y')
>> legend('Sol aproximada ','Sol exacta')
>> print -dpng Ejemplo.png
```

La expresión print -dpng Ejemplo.png permite crear un archivo Ejemplo.png con la figura graficada. Los resultados son mostrados en la Figura 1.

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Para resolver el sistema de ecuaciones 2×2 de la forma

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + 4t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 0$$

podemos utilizar *ode45* pero hay que definir *odefun* e $y0$ de forma vectorial.

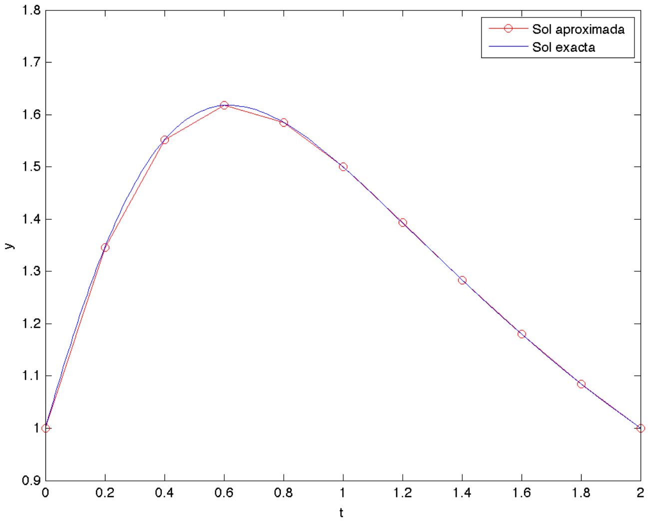

Figure 1: Ejemplo de Problema de Valor inicial

```
>> f=@(t,y) [y(1)-y(2)+2;-y(1)+y(2)+4*t];
>> t=0:0.2:2;
>> y0=[-1;0];
>> [t,y]=ode45(f,t,y0);
>> plot(t,y,'-o')
```

si deseamos comparar con la soluciones exactas $y_1(t) = -\frac{1}{2}\exp(2t) + t^2 + 2t - \frac{1}{2}$ e $y_2(t) = \frac{1}{2}\exp(2t) + t^2 - \frac{1}{2}$, agregamos

```
>> hold on
>> y1=@(t) -.5*exp(2*t)+t^2+2*t-.5;
>> y2=@(t).5*exp(2*t)+t^2-.5;
>> fplot(y1,[0,2],'r');
>> fplot(y2,[0,2],'g');
>> xlabel('t')
>> ylabel('y')
>> legend('y1 aproximada ','y2 aproximada','y1 exacta','y2 exacta')
```

Los resultados son mostrados en la Figura 2

Ecuaciones de orden superior

Para resolver la ecuación de orden superior

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, \quad 0 \leq t \leq 3 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0,$$

escribimos el problema como un problema de valor inicial vectorial definiendo $Y(t) = [y(t); y'(t); y''(t)]$ y luego derivando obtenemos

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ e^t - 2y''(t) + y'(t) + 2y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y[2] \\ Y[3] \\ e^t - 2Y[3] + Y[2] + 2Y[1] \end{bmatrix} = F(t, Y(t)),$$

donde $Y[i]$ es la componente i de $Y(t) = [y(t); y'(t); y''(t)]$. Luego podemos utilizar *ode45* de la forma

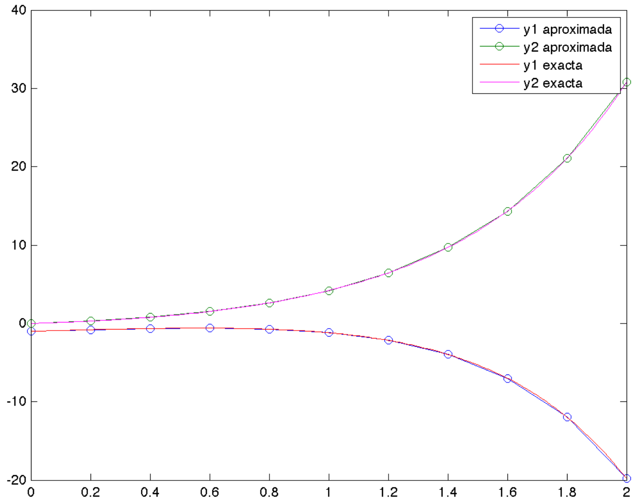

Figure 2: Ejemplo de sistemas de ecuaciones

```
>> t=0:0.5:3;
>>f=@(t,y) [y(2);y(3);exp(t)-2*y(3)+y(2)+2*y(1)];
>> y0=[1;2;0];
>> [t,y]=ode45(f,t,y0);
>> plot(t,y(:,1),'-o')
```

donde la expresión y(:,1) indica que solo graficamos la primera componente de $Y(t)$. Si deseamos comparar con la solució exacta $y(t) = \frac{43}{36}\exp(t) + \frac{1}{4}\exp(-t) - \frac{4}{9}\exp(-2*t) + \frac{1}{6}t\exp(t)$

```
>> hold on
>> fplot('43*exp(t)/36+exp(-t)/4-4*exp(-2*t)/9+t*exp(t)/6',[0,3])
>> xlabel('t')
>> ylabel('y')
>> legend('Sol aproximada ','Sol exacta')
```

Los resultados son mostrados en la Figura 3.

Ecuaciones de orden superior: Circuito eléctrico

Considere el circuito eléctrico de la Figura 4. Queremos calcular la función $v(t)$ que representa la caída de potencial en los extremos del condensador C partiendo del instante inicial $t = 0$ en el cual ha sido apagado el interruptor I. Supongamos que la inductancia L puede expresarse como función explícita de la intensidad actual i, esto es $L = L(i)$. La ley de Ohm da

$$e - \frac{d(i_1 L(i_1))}{dt} = i_1 R_1 + v$$

donde R_1 es una resistencia. Suponiendo que los flujos de corriente se dirigen como se indica en la Figura 4, derivando con respecto a t ambos miembros de la ley de Kirchoff $i_1 = i_2 + i_3$ y observando que $i_3 = Cdv/dt$ e $i_2 = v/R_2$, obtenemos la ecuación adicional

$$\frac{di_1}{dt} = C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R_2}\frac{dv}{dt}.$$

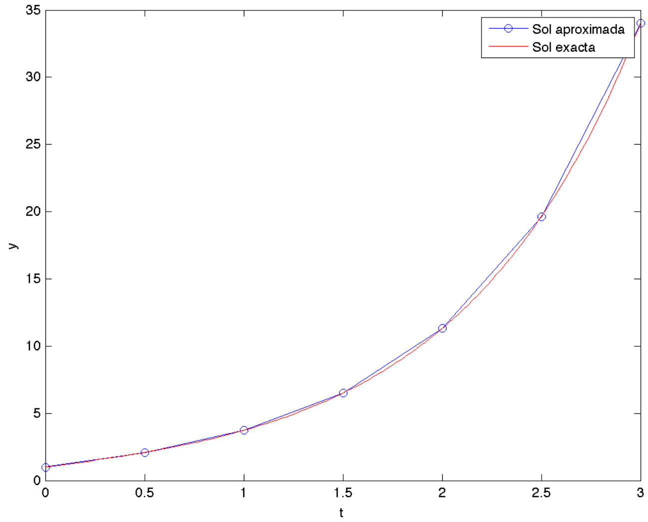

Figure 3: Ejemplo de ecuación diferencial de orden superior

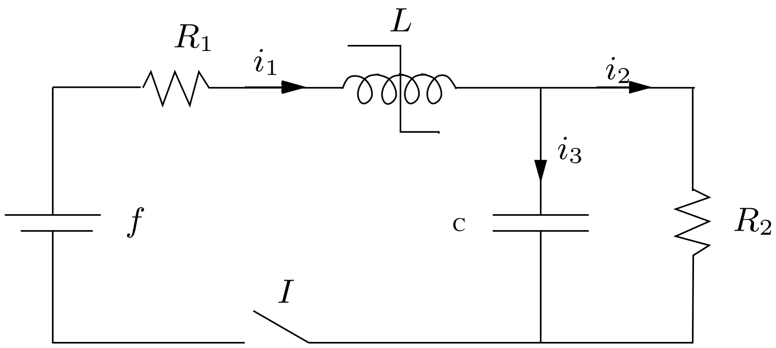

Figure 4: Circuito eléctrico

Por tanto hemos encontrado un sistema de dos ecuaciones diferenciales cuya solución permite la descripción de la variación a lo largo del tiempo de las dos incógnitas i_1 y v.

Supongamos que $L(i_1) = L$ es constante y que $R_1 = R_2 = R$ entonces v es solución del problema

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{dv}{dt} + 2v = e.$$

En este caso, v puede obtenerse resolviendo el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{L}{R} + RC\right)z_2(t) - \dfrac{2}{LC}z_1(t) + \dfrac{e}{LC}. \end{array}\right. \tag{1}$$

con condiciones iniciales $z_1(0) = z_2(0) = 0$.

La función del lado derecho puede ser escrito en MATLAB de la siguiente forma:

```
function dzdt= fun(t,z,L,C,R,e)
dzdt(1,1)= z(2);
dzdt(2,1)= -( L/R+R*C )/( L*C )*z(2) -2/( L*C )*z(1)+ e/( L*C );
end
```

Resolvemos el problema anterior utilizando el método de Euler explícito y la función *ode45* de MATLAB considerando $L = 0.1$ henrios, $C = 10^{-3}$ $R = 10$ ohmios y $e = 5$ voltios donde henrio, faradio, ohmio y voltio son, respectivamente, las unidades de medida de inductancia, capacitancia, resistencia y voltaje.

En la Figura 5 mostramos los valores aproximados de z_1 y z_2 que corresponden a v y dv/dt, respectivamente. Como se esperaba, $v(t)$ tiende a $e/2 = 2.5$ voltios para t grande. Notar que la solución de los métodos no coincide, es por ello que en la Figura 6 mostramos los valores aproximados de z_1 y z_2 para distintos valores de $h \in \{0.02, 0, 01, 0.001\}$. De esta figura notamos que las soluciones de Euler convergen.

```
%Datos del problema
L=0.1;C=1e-3;R=10;e=5;
ti=0;tf=0.1;
z0=[0; 0]

%Metodo de Euler explicito h=0.02
N=50;
tE=linspace(ti,tf,N+1);
h=tf/N;
M=length(tE);
yE=zeros(2,M);
yE(:,1)=[0; 0];

for i=2:M
    yE(:,i)=yE(:,i-1)+h*fun(tE(i-1),yE(:,i-1),L,C,R,e);
end

%ode45

[t,y] = ode45(@(t,z)fun(t,z,L,C,R,e),[ti tf],z0);

%Grafica de la solucion

subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),tE,yE(1,:),'--');
legend('Sol ode45','Sol Euler h=0.002')
xlabel('t');ylabel('z_1')
subplot(1,2,2);plot(t,y(:,2),tE,yE(2,:),'--');
legend('Sol ode45','Sol Euler h=0.002')
xlabel('t');ylabel('z_2')
```

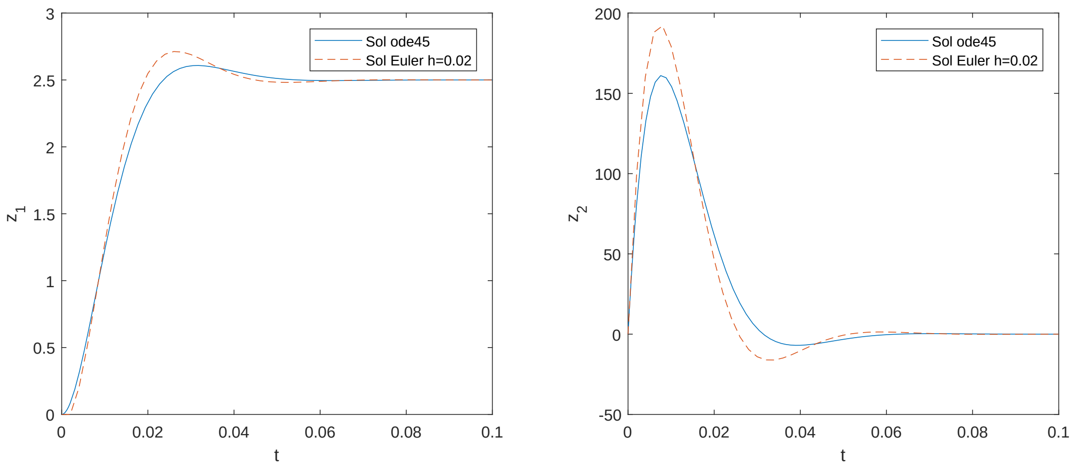

Figure 5: Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (1) mediante el método de Euler explícito con $h = 0.02$ y ode45. La caída de potencial $v(t)$ se muestra a la izquierda, su derivada $dv(t)/dt$ a la derecha.

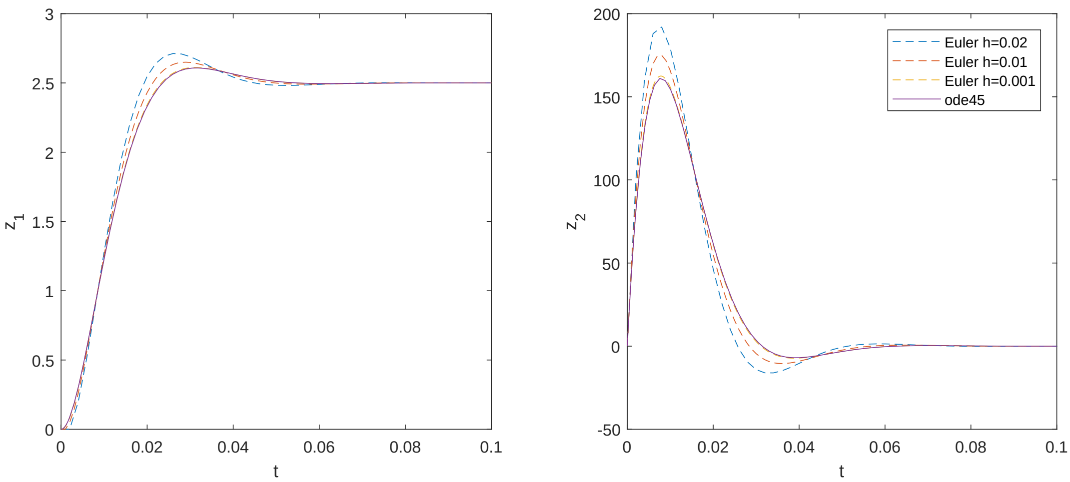

Figure 6: Solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (1) mediante el método de Euler explícito con $h \in \{0.02, 0, 01, 0.001\}$ y ode45. La caída de potencial $v(t)$ se muestra a la izquierda, su derivada $dv(t)/dt$ a la derecha.