UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Métodos Numéricos 220138

Laboratorio 5

Cuadrados mínimos- Interpolación

1. Considere el problema de ajustar por cuadrados mínimos un polinomio de grado n a un conjunto de valores medidos de una función en $m+1$ puntos equiespaciados del intervalo $[0,1]$:

$$t_i = ih, \quad i = 0\dots,m, \quad \text{donde } h = \frac{1}{m}.$$

   (a) Haga un programa *function* que construya la matriz rectangular del problema para valores cualesquiera de m y n.

   Sugerencia: A fin de poder evaluar más fácilmente el polinomio obtenido con el comando MATLAB *polyval* (vea como se utiliza este comando con el *help* de MATLAB), resulta conveniente acomodar los coeficientes del polinomio en un vector c de longitud $n+1$ tal que

$$p(x) = c_1x^n + \cdots c_nx + c_{n+1}.$$

   (b) Verifique que el número de condición de la matriz $\mathbf{B}$ del sistema de ecuaciones normales correspondiente crece significativamente con n ($n = 5$, $n = 10$, $n = 15$). Sugerencia: utilice el *help* de MATLAB para estudiar el funcionamiento del comando *cond*, que aproxima el número de condición de una matriz.

2. Para cada una de las siguientes funciones, determine el polinomio de grado 5 que mejor ajusta sus valores en los puntos t_i anteriores, para $m = 10$:

   (a) $f(t) = e^t$;

   (b) $g(t) = \operatorname{sen} \pi t$, con errores aleatorios de tamaño máximo 0.05 (ver comando *rand*).

   Dibuje en cada caso en un mismo gráfico, los valores ajustados, el polinomio obtenido y la función dada (en el caso de $g(t)$, sin incluir los errores aleatorios).

3. El archivo `circulo.mat` (descargar de la página web del curso) contiene valores medidos x_i e y_i (en un sistema de coordenadas rectangulares) del plano de una pieza mecánica circular.

   (a) Determine el radio de la pieza a partir de esas mediciones.

   (b) Dibuje en un mismo gráfico los valores medidos y la circunferencia obtenida.

   Sugerencia: Sean r el radio de la circunferencia y (a,b) las coordenadas de su centro, ambos a determinar. Para cada punto (x_i, y_i) de la circunferencia se tiene que

$$(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = r^2$$

   y, por lo tanto,

$$2x_ia + 2y_ib + (r^2 - a^2 - b^2) = x_i^2 + y_i^2.$$

   Sea $c = (r^2 - a^2 - b^2)$. Se trata de determinar los valores de a, b y c que resuelven el problema en el sentido de los cuadrados mínimos.

4. El archivo `rango.mat` (descargar de la página web del curso) contiene valores medidos de dos magnitudes t e y. Se quiere modelar la dependencia de y respecto de t del siguiente modo:

$$y(t) = A + B \operatorname{sen}^2 \pi t + C \cos^2 \pi t.$$

   (a) Determine valores de los parámetros A, B y C para que la curva ajuste las mediciones.

   (b) Busque una explicación a la advertencia que da MATLAB.

   (c) Dibuje en un mismo gráfico los valores medidos y el modelo ajustado.

5. Dados dos vectores x e y de la misma longitud m, el comando MATLAB *polyfit* determina los coeficientes c_i del polinomio de grado n

$$p(x) = c_1 x^n + \cdots c_n x + c_{n+1}$$

   cuya gráfica ajusta por cuadrados mínimos los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$. En particular, cuando $n = m - 1$, $p(x)$ es el polinomio de interpolación determinado por esos puntos.

   (a) Aprenda a utilizar el comando *polyfit* mediante el *help* de MATLAB.

   (b) i. Genere los puntos $(x, \operatorname{sen} x)$ para $x = 0, 1, \ldots, 10$.

      ii. Dibuje en un mismo gráfico estos puntos y los polinomios de grados 5 y 10 que los ajustan en el sentido de los cuadrados mínimos. Utilice para ello los comandos *polyfit* y *polyval*.

      iii. Indique cómo se ve en el gráfico que el de grado 10 es el polinomio de interpolación.

   (c) Dibuje en un mismo gráfico:

      i. la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ para $-5 \leq x \leq 5$;

      ii. los puntos $(x, f(x))$ para $x = -5, -4, \ldots, 4, 5$;

      iii. los polinomios de grados 6 y 10 que ajustan esos puntos en el sentido de los cuadrados mínimos.

      Explique la razón de las oscilaciones que observa.

   (d) Dibuje en un mismo gráfico la función y los puntos del item anterior, y el spline cúbico natural que interpola esos mismos puntos. Para hacerlo, vea como se utiliza el comando *spline* mediante el *help* de MATLAB.

6. (a) Genere los puntos $(x, \operatorname{sen}(e^x - 2))$ para $x = 0, 1, \ldots, 10$.

   (b) Dibuje en un mismo gráfico estos puntos y los polinomios de grados 5 y 10 que los ajustan en el sentido de los cuadrados mínimos. Utilice para ello los comandos *polyfit* y *polyval*.

7. El archivo `espiral.mat` (descargar de la página web del curso) contiene valores medidos de las coordenadas de una espiral.

   (a) Grafique los puntos y la espiral correspondiente mediante el comando plot de Matlab.

   (b) Interpole por separado los puntos (i, x_i) e (i, y_i) mediante splines cúbicos y grafique la curva parametrizada que se obtiene.