Integración Numérica

En esta sección proponemos métodos para la aproximación numérica de integrales de funciones. Se sabe que para una función genérica no siempre es posible hallar una primitiva en forma explícita. Incluso si fuese conocida, podría ser difícil de utilizar. Este es el caso, por ejemplo, de la función $f(x) = \cos(4x)\cos(3\sin(x))$ para la cual tenemos

$$\int_0^\pi f(x)dx = \pi \left(\frac{3}{2}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(9/4)^k}{k!(k+4)!},$$

la tarea de calcular una integral se transforma en la, igualmente incómoda, de sumar una serie. En otras circunstancias, la función que queremos integrar sólo se conoce en un conjunto de puntos (por ejemplo, cuando representa los resultados de una medida experimental), exactamente como sucede en el caso de la aproximacón de funciones. En todas estas situaciones es necesario considerar métodos numéricos para obtener un valor aproximado de la cantidad de interés, independientemente de lo difícil que sea la función a integrar.

Regla de Integración numérica.

Para aproximar una integral de la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

puede aproximarse el integrando f por el polinomio $p \in \mathcal{P}_n$ que interpola a f en $(n+1)$ puntos $x_0, \ldots, x_n$ e integrar el polinomio de interpolación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx =: I_n(f).$$

Luego, el valor aproximado de la integral, $I_n(f)$, se calcula explícitamente.

El error que se comete al aproximar la integral por $I_n(f)$ es

$$R_n(f) := \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b E(x)\,dx,$$

donde $E(x) := f(x) - p(x)$ es el error de interpolación.

Si se usa la fórmula de Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x),$$

para calcular explícitamente $I_n(f)$, se tiene

$$I_n(f) = \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \ell_i(x)\,dx\right) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

con

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Departamento de Matemática - Universidad del Bío-Bío - 2019

Llamaremos:

- $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$: **regla de integración numérica** o **regla de cuadratura**.
- x_i: **nodos** de la regla de integración,
- A_i: **coeficientes** o **pesos** de la regla de integración.

El error de la integración numérica,

$$R_n(f) := \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx,$$

puede estimarse a partir de la expresión del error de interpolación:

$$E(x) := f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x),$$

para algún $\xi_x \in (a, b)$. Así:

$$R_n(f) = \int_a^b E(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)\,dx.$$

Regla del punto medio (elemental): $n = 0$, con $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

En este caso, $A_0 = b - a$ y se obtiene:

$$I_0(f) = (b - a)\,f(\widehat{x}), \qquad \text{con} \quad \widehat{x} := \frac{a+b}{2}.$$

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, el error de integración está dado por:

$$R_0(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_0(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - \widehat{x})^2\,dx.$$

Llamando $M_2 := \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ y evaluando la integral restante, se obtiene:

$$|R_0(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b - a)^3.$$

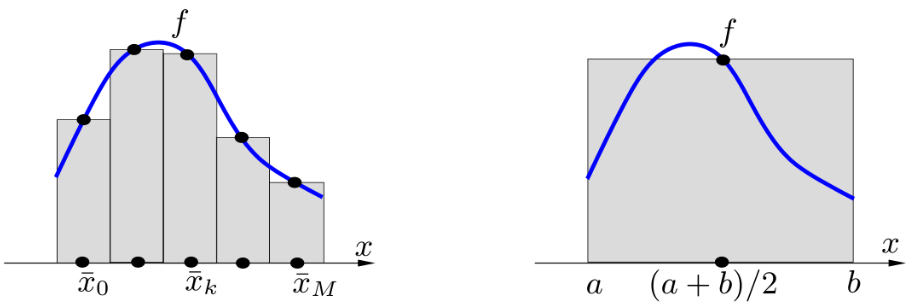

Figura 1: Fórmula del punto medio compuesta (izquierda); fórmula del punto medio elemental (derecha)

Regla del punto medio (compuesta): El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales

$$x_i := a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad \text{con} \quad h := \frac{b-a}{n}.$$

La regla del punto medio compuesta se obtiene aplicando la regla del punto medio elemental en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx h \sum_{i=1}^n f(\widehat{x}_i), \qquad \text{con} \quad \widehat{x}_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}. \end{aligned}$$

La **regla del punto medio compuesta** consiste en aproximar la integral por:

$$I_M(f) := h \sum_{i=1}^n f(\widehat{x}_i), \qquad \text{con} \quad \widehat{x}_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}.$$

Cuando $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, para el error

$$R_M(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_M(f)$$

se tiene:

$$|R_M(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)h^2, \qquad \text{con} \quad M_2 := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

En consecuencia, esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual que uno ($\mathcal{P}_1$).

Regla del trapecio (elemental): $n = 1$, con $x_0 = a$ y $x_1 = b$.

En este caso, $A_0 = A_1 = \dfrac{b-a}{2}$ y se obtiene:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right].$$

Si $f \in C^2([a, b])$, para el error de integración se tiene:

$$\begin{aligned} R_1(f) &:= \int_a^b f(x)\,dx - I_1(f) \\ &= \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}\,dx \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \end{aligned}$$

para algún $\xi \in (a, b)$.

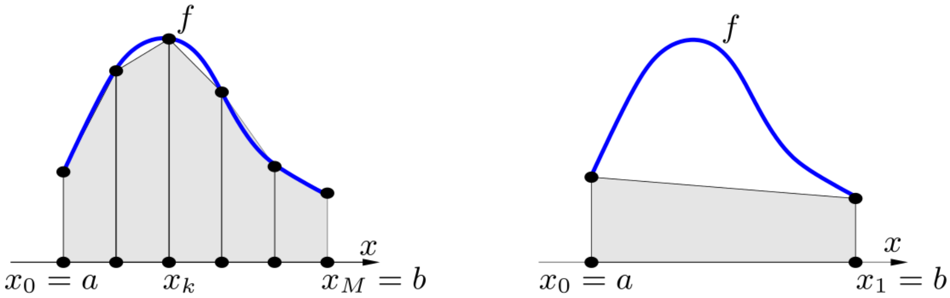

Figura 2: Fórmula del trapecio compuesta (izquierda); fórmula del trapecio elemental (derecha)

Regla del trapecio (compuesta): El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales

$$x_i := a + ih, \qquad i = 0, 1, \dots, n, \qquad \text{con} \quad h := \frac{b-a}{n}.$$

La regla de los trapecios compuesta se obtiene aplicando la regla del trapecio elemental en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx, \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \\ &= h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \end{aligned}$$

La **regla de los trapecios compuesta** consiste en aproximar la integral por:

$$I_T(f) := h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

Cuando $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, el error de esta regla satisface:

$$R_T(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi),$$

para algún $\xi \in (a, b)$ y, por lo tanto,

$$|R_T(f)| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2, \qquad \text{con} \quad M_2 := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual que uno ($\mathcal{P}_1$).

Regla de Simpson (elemental): $n = 2$, con $x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$.

En este caso, $A_0 = A_2 = \dfrac{b-a}{6}$ y $A_1 = 4\dfrac{b-a}{6}$, y se obtiene:

$$I_2(f) := \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\widehat{x}) + f(b)\right], \qquad \text{con} \quad \widehat{x} := \frac{a+b}{2}.$$

Si $f \in C^4([a,b])$, para el error de integración se tiene:

$$R_2(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_2(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),$$

para algún $\xi \in (a,b)$.

Regla de Simpson (compuesta): El intervalo $[a,b]$ se divide en $2n$ subintervalos iguales:

$$x_i := a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n, \qquad \text{con} \quad h := \frac{b-a}{2n}.$$

La **regla de de Simpson compuesta** se obtiene aplicando la regla de Simpson elemental en cada subintervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx, \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{2h}{6}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] \\
&= \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\right].
\end{aligned}$$

La **regla de Simpson compuesta** consiste en aproximar la integral por:

$$I_S(f) := \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\right].$$

Cuando $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, el error de esta regla satisface:

$$R_S(f) := \int_a^b f(x)\,dx - I_S(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi),$$

para algún $\xi \in (a,b)$.

Esta regla es **exacta** para integrar polinomios de grado menor o igual que tres ($\mathcal{P}_3$).

Observaciones.

1. Es costumbre referirse a las reglas compuestas $I_M(f)$, $I_T(f)$ e $I_S(f)$ simplemente como **regla del punto medio**, **regla de los trapecios** y **regla de Simpson**.

2. Existen versiones de las reglas para **nodos no equiespaciados**.

3. Se dice que una regla es de **orden** h^p, y se escribe $\mathcal{O}(h^p)$, cuando el error satisface $|R| \leq Ch^p$, para alguna constante $C > 0$ independiente de h.

   Así, las reglas del punto medio y de los trapecios son $\mathcal{O}(h^2)$, mientras que la regla de Simpson es $\mathcal{O}(h^4)$.