Interpolación

El concepto de interpolación está basado en la idea de obtener una función p, que aproxime una función desconocida f de la cual conocemos su valor sólo en un número finito de puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Intuitivamente para que p esté *cerca* de f, es natural pedirle que coincida con f en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Interpolación Polinomial:

Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, $n+1$ puntos en el plano, tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. El problema de interpolación polinomial consiste en encontrar un polinomio $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$, tal que la gráfica del polinomio coincida exactamente con los puntos dados. Es decir, tal que se satisfagan las **condiciones de interpolación**:

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

El siguiente teorema muestra la existencia de tal polinomio.

Teorema. *Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, entonces existe un* ***único*** *polinomio $p(x)$, de grado menor o igual a n, tal que*

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Coeficientes Indeterminados:

Una forma de determinar los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ (que me permitirán conocer el polinomio de interpolación), se aplican las **condiciones de interpolación**, para obtener el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} p(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ p(x_1) = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \qquad \vdots \\ \qquad \vdots \\ p(x_n) = a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}$$

En forma matricial, se tiene lo siguiente: Hallar $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$X\mathbf{a} = \mathbf{y},$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \cdots & \cdots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times 1}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}_{(n+1)\times 1}.$$

Si los $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ tales que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, se puede demostrar que $det(X) \neq 0$ y en consecuencia existe un único polinomio de interpolación.

Ejemplo: Considere los siguientes puntos en el plano: $(-3, 9), (-2, 5), (0, 1)$ y $(1, -1)$. Encuentre por el método de coeficientes indeterminados el único polinomio de interpolación de los puntos dados.

Solución: Por el teorema, sabemos que existe un único polinomio $p(x)$ de grado a lo más 3 tal que $p(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Es decir,

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Usando los puntos, (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, 3$, escribimos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} -27 & 9 & -3 & 1 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Usando eliminación Gaussiana, se tiene que el polinomio de interpolación es:

$$p(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + 1.$$

Polinomios de Lagrange:

Una manera de calcular el polinomio de interpolación p, sin tener que resolver un sistema de ecuaciones, es a través de los polinomios de Lagrange ℓ_i, con $i = 0, \ldots, n$ asociados a los puntos $x_0, \ldots, x_n$. Estos polinomios de grado n están definidos por

$$\ell_i(x) \;:=\; \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Notar que ellos satisfacen las siguientes propiedades:

- cada $\ell_i(x)$ es un polinomio de grado n;
- $$\ell_i(x_j) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 0, \ldots, n.$$

Usando estas propiedades, notamos que el polinomio $p(x)$ definido por:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x)\,,$$

verifica las siguientes propiedades:

- $p(x)$ tiene grado menor o igual a n;
- para $i = 0, \dots, n$,
$$p(x_i) = y_i \ell_i(x_i) = y_i.$$

De estas condiciones se deduce que $p(x)$ es el polinomio de interpolación para los puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

Observación: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Una manera de aproximar la función f es a través del polinomio de interpolación, respecto a $x_0, \dots, x_n$, es el siguiente polinomio:

$$p_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x).$$

Ejemplo: La densidad del aire $\rho(kg/m^3)$ en una ciudad costera varia con la altura $h(km)$ de la siguiente manera:

h	1	4	7
ρ	1.105	0.855	0.602

a) Obtenga el polinomio de interpolación de la tabla dada usando los polinomios de Lagrange;

b) Estime la densidad del aire para $h = 5$ usando el polinomio de interpolación.

Solución: (a) Tenemos que el polinomio de interpolación de la tabla es de grado a lo más dos. Usando los polinomios de Lagrange, tenemos que:

$$l_0(h) = \frac{(h-h_1)(h-h_2)}{(h_0-h_1)(h_0-h_2)} = \frac{(h-4)(h-7)}{18},$$

$$l_1(h) = \frac{(h-h_0)(h-h_2)}{(h_1-h_0)(h_1-h_2)} = \frac{(h-1)(h-7)}{-9},$$

$$l_2(h) = \frac{(h-h_0)(h-h_1)}{(h_2-h_0)(h_2-h_1)} = \frac{(h-1)(h-4)}{18}.$$

Luego, el polinomio de interpolación es:

$$p(h) = \sum_{i=0}^{2} \rho_i l_i(h) = \rho_0 l_0(h) + \rho_1 l_1(h) + \rho_2 l_2(h)$$

$$= \frac{1.105}{18}(h-4)(h-7) - \frac{0.855}{9}(h-1)(h-7) + \frac{0.602}{18}(h-1)(h-4)$$

$$= -0.0002h^2 - 0.0824h + 1.1878.$$

(b) Cuando $h = 5$, tendremos una densidad del aire:

$$p(5) = -0.0002(25) - 0.0824(5) + 1.1878 = 0.7708.$$

La gran ventaja de obtener un polinomio que interpole un conjunto de datos (que pueden corresponder a una función que se conoce sólo en algunos puntos) es que el polinomio da una fórmula que permite hacer evaluaciones en puntos diferentes a los conocidos. Ahora, estudiaremos el error que se comete al considerar un polinomio en vez de la función exacta.

Teorema. *Sean $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ números reales distintos y f una función real $n+1$ veces continuamente diferenciable en el intervalo $I = (x_0, x_n)$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi_x \in I$ tal que*

$$E(x) := f(x) - p_n(x) \ = \ \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x),$$

donde $p_n(x)$ es el polinomio de interpolación de la función f en los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))$, es decir,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x).$$

Ejemplo: Interpolación lineal.

Sea $p_1(x)$ el polinomio que interpola a la función $f(x) = e^x$ en los puntos $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. Obtenga una estimación para el error máximo.

Solución: Notamos que $n = 1$. Por lo tanto,

$$p_1(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = 1 + (e-1)x.$$

Ahora, del teorema anterior se tiene:

$$E(x) = f(x) - p_1(x) = (x-x_0)(x-x_1)\,\frac{f''(\xi_x)}{2} \qquad x_0 < \xi_x < x_1\,.$$

Así,

$$E(x) = \frac{1}{2}x(x-1)e^{\xi_x} \qquad x_0 < \xi_x < x_1\,.$$

Se tiene entonces que

$$\max_{x\in[a,b]} |E(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{8}e.$$

Extrapolación y oscilaciones

Hay dos cuestiones relacionadas con la interpolación polinomial que deben abordarse. Estas son extrapolaciones y oscilaciones.

La extrapolación es el proceso de estimar un valor de $f(x)$ que se encuentra fuera del rango de los puntos base conocidos, x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Como se muestra en la Figura **??**, la naturaleza abierta de la extrapolación representa un paso hacia lo desconocido porque el proceso extiende la curva más allá de la región conocida. Como tal, la verdadera curva podría fácilmente discrepar de la predicción. Por lo tanto, se debe tener mucho cuidado cuando surja un caso donde se deba extrapolar

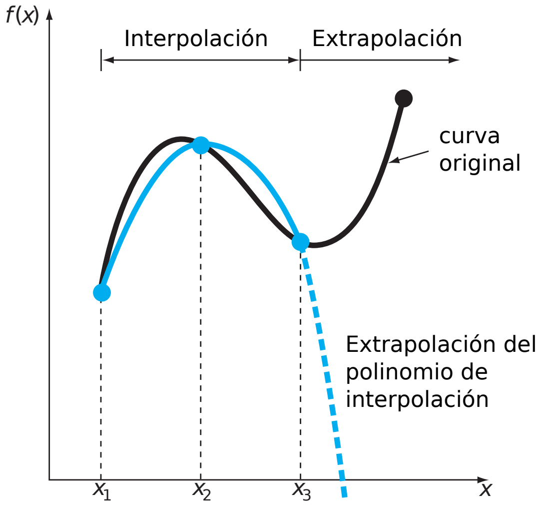


Figura 1: Extrapolación

Al realizar una interpolación polinomial para un valor de n grande con puntos x_i equiespaciados, se puede comprobar que se producen grandes oscilaciones del polinomio de interpolación p entre dos puntos consecutivos, especialmente cerca de los extremos del intervalo de interpolación $[a, b]$. El siguiente ejemplo ilustra muy bien este punto.

Ejemplo: Fenómeno de Runge. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad -5 \leq x \leq 5$, consideremos el polinomio de grado 10 que interpola f en los puntos $x_i = -5, -4, -3, \ldots, 5$.

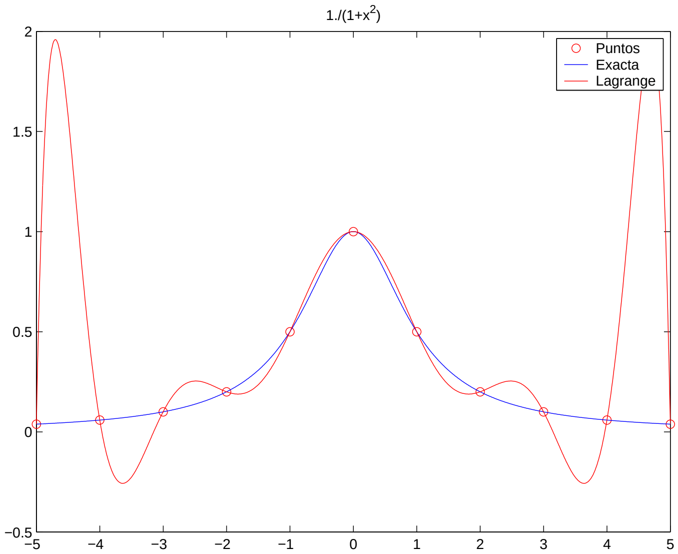


Figura 2: Fenómeno de Runge

Una estrategia efectiva que evita esta situación consiste en construir funciones de interpolación polinomial por tramos (pedazos), en particular las **interpolantes spline cúbicas**.

Interpolación por funciones spline cúbicas

Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Una función s es una **interpolante spline cúbica** en $[x_0, x_n]$, si existen polinomios $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$, de grado a lo más 3, tales que:

- $s(x) = q_k(x)$, en $[x_k, x_{k+1}]$, $\quad k = 0, 1, \cdots, n-1$,
- $q_k(x_k) = y_k$, $\qquad q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$,
- $q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k) = s'(x_k)$, $\quad k = 1, \cdots, n-1$,
- $q''_{k-1}(x_k) = q''_k(x_k) = s''(x_k)$, $\quad k = 1, \cdots, n-1$.

Las dos últimas propiedades quieren decir que los polinomios q_k tienen la misma pendiente y concavidad en los nodos de acoplamiento. Esto garantiza la suavidad de s en $[x_0, x_n]$.

En particular, cada q''_k es lineal e interpola a (x_k, σ_k) y (x_{k+1}, σ_{k+1}) en $[x_k, x_{k+1}]$, donde $\sigma_k := s''(x_k)$. En consecuencia:

$$q''_k(x) = \sigma_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \sigma_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},$$

con $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Si $h_k := x_{k+1} - x_k$, con $k = 0, 1, \cdots, n-1$, entonces integrando dos veces q''_k, tenemos

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k (x_{k+1} - x)^3 + \sigma_{k+1}(x - x_k)^3}{6h_k} + \lambda_k(x),$$

donde λ_k, con $k = 0, 1, \cdots, n-1$, son polinomios de grado 1, que se pueden escribir de la forma

$$\lambda_k(x) := A_k(x - x_k) + B_k(x_{k+1} - x),$$

donde A_k y B_k son constantes determinadas por las relaciones $q_k(x_k) = y_k$ y $q_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$, es decir ellas se determinan despejando su valor de las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{\sigma_k}{6} h_k^2 + B_k h_k, \\ y_{k+1} &= \frac{\sigma_{k+1}}{6} h_k^2 + A_k h_k. \end{aligned}$$

Despejando A_k y B_k, y reemplazando dichos valores en el polinomio de q_k, obtenemos

$$\begin{aligned} q_k(x) &= \frac{\sigma_k}{6}\left[\frac{(x_{k+1} - x)^3}{h_k} - h_k(x_{k+1} - x)\right] \\ &\quad + \frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{(x - x_k)^3}{h_k} - h_k(x - x_k)\right] \\ &\quad + y_k\left[\frac{x_{k+1} - x}{h_k}\right] + y_{k+1}\left[\frac{x - x_k}{h_k}\right], \\ &\qquad\qquad k = 0, 1, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

Los valores σ_k están determinados por el último conjunto de condiciones que falta por verificar y que caracterizan a la spline cúbica, a saber que la derivada es continua. Es decir, se debe verificar que s' resulte continua en cada x_k. Para ello derivamos el polinomio q_k obteniendo

$$\begin{aligned} q_k'(x) &= \frac{\sigma_k}{6}\left[-\frac{3(x_{k+1}-x)^2}{h_k}+h_k\right]+\frac{\sigma_{k+1}}{6}\left[\frac{3(x-x_k)^2}{h_k}-h_k\right] \\ &\quad +\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}, \qquad k=0,1,\cdots,n-1. \end{aligned}$$

Luego, como $q_{k-1}'(x_k)=q_k'(x_k),\ k=1,\cdots,n-1$ (continuidad de s'), se tiene que

$$\frac{\sigma_{k-1}}{6}h_{k-1}+\frac{2\sigma_k}{6}h_{k-1}+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}=-\frac{2\sigma_k}{6}h_k-\frac{\sigma_{k+1}}{6}h_k+\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k},$$

para $\quad k=1,\ldots,n-1.$

Es decir, tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$h_{k-1}\sigma_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)\sigma_k+h_k\sigma_{k+1}=6\left\{\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right\}$$

con $\quad k=1,\ldots,n-1$, constituido por $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas : $\sigma_0,\ldots,\sigma_n$.

Para resolver este sistema, por ejemplo podemos asignar valores arbitrarios a las incógnitas σ_0 y σ_n, reduciendo así el número de incógnitas a $n-1$. Cuando se toma $\sigma_0=\sigma_n=0$, la interpolante que se obtiene se denomina **spline cúbica natural**. Escribiendo las ecuaciones de manera matricial para la spline cúbica natural, se obtiene el siguiente sistema tridiagonal, con matriz simétrica y definida positiva.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-2} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix}=6\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

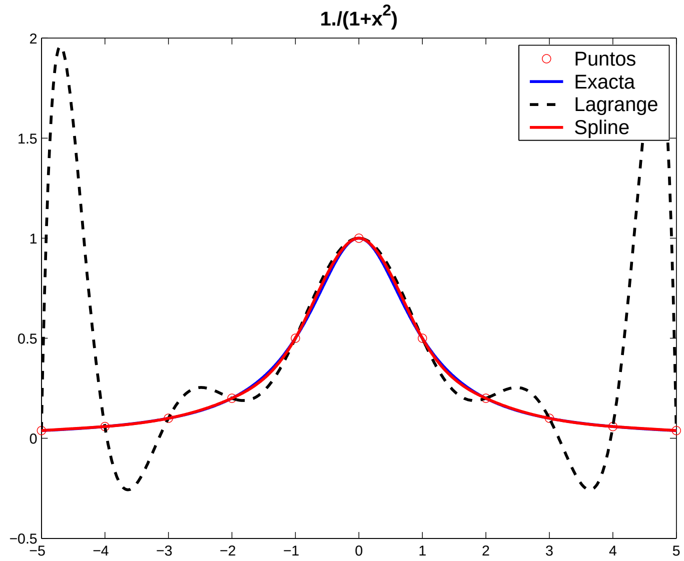
donde

$$a_k=2(h_{k-1}+h_k),$$

$$d_k=\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}, \qquad k=1,\ldots,n-1,$$

$$b_k=h_k, \qquad k=1,\ldots,n-2,$$

Ejemplo: Consideremos nuevamente la función f del fenómeno de Runge. Si calculamos la spline cúbica natural s que interpola a f en los puntos $x_i=-5,-4,-3,\ldots,5$, obtenemos


1./(1+x^2)
Puntos
Exacta
Lagrange
Spline
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

DMH/VAD.