Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias describen la evolución de muchos fenómenos en varios campos: termodinámica, dinámica de poblaciones, trayectoria de satélites, circuitos eléctricos, etc. Desafortunadamente, sólo para tipos muy especiales de ecuaciones diferenciales ordinarias se dispone de soluciones explícitas. En otras ocasiones, la solución está disponible unicamente en forma implícita. Este es el caso, por ejemplo, de la ecuación $y' = (y-t)/(y+t)$ cuya solución satisface la relación implícita

$$\frac{1}{2}\ln(t^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{t}\right) = C,$$

donde C es una constante arbitraria. En otros casos la solución ni siquiera es representable en forma implícita; esto ocurre con la ecuación $y' = e^{-t^2}$ cuya solución general sólo puede expresarse mediante un desarrollo en serie. Por todas estas razones, buscamos métodos numéricos capaces de aproximar la solución de cada familia de ecuaciones diferenciales ordinarias para la que existan soluciones.

Problemas de valores iniciales (P.V.I.):

Se considera el problema de valores iniciales (P.V.I.):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a,b], \\ y(a) = y_0 \text{ dado}, \end{cases}$$

el que supondremos tiene solución única, $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual es acotada y depende continuamente de los datos f e y_0. En la proposición siguiente presentamos un resultado clásico de Análisis.

Teorema. Existencia y unicidad de solución de un P.V.I.
Sean D un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$, f una función continua en el dominio D y (a, y_0) un punto interior de D.

Considere el P.V.I.

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & (x,y) \in D, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Si f satisface la **condición de Lipschitz**

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le k|y_1 - y_2| \qquad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in D$$

con $k \ge 0$, entonces, para algún intervalo $I = [a-\alpha, a+\alpha]$, existe una única solución $y = y(x)$ del P.V.I. definida en ese intervalo I.

Observación. Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe y es acotada en D, entonces la condición de Lipschitz se satisface con

$$k = \max_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < \infty.$$

Ejemplo. Considere la ecuación

$$y' = 1 + \operatorname{sen} xy \quad \text{y} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 1,\ -\infty < y < \infty\right\}.$$

Se tiene que

$$f(x,y) = 1 + \operatorname{sen}(xy) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) \;\Rightarrow k = 1.$$

Luego, dado cualquier (a, y_0) con $0 < a < 1$, por el teorema existe una única solución del P.V.I. en algún intervalo centrado en a. Más aún, puede demostrarse que el P.V.I. tiene solución única en todo el intervalo $[0, 1]$.

Solución Numérica de un P.V.I.

Los métodos numéricos para resolver el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0 \text{ dado,} \end{cases}$$

se basan en tomar una partición en N subintervalos del intervalo $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b,$$

y obtener **sucesivamente** N números $y_1, y_2, \ldots, y_N$ (solución numérica) que aproximan a los valores $y(x_1), \ldots, y(x_N)$ de la solución exacta en los **nodos** $x_1, \ldots, x_N$.

Típicamente los nodos se escogen equiespaciados; es decir, están definidos por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, N, \qquad \text{con } h = \frac{b-a}{N}.$$

h se llama paso de discretización.

Método de Euler.

Considere el P.V.I.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Una manera de aproximar la solución de este problema consiste en reemplazar la derivada y' por la aproximación

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

válida para h pequeño.

Haciendo este reemplazo en la ecuación se encuentra

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx f(x, y(x))$$

de donde,

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)).$$

Partiendo de la condición inicial $y(a) = y_0$ y considerando h pequeño, el valor

$$y_1 := y(a) + hf(a, y(a))$$

define una aproximación para $y(a+h)$.

Una vez calculada esta aproximación, se puede utilizar para obtener la aproximación y_2 de $y(a+2h)$, a saber,

$$y_2 := y_1 + hf(a+h, y_1).$$

Repitiendo este proceso se pueden obtener aproximaciones para $y(a+3h)$, $y(a+4h)$, $\ldots$, $y(a+Nh)$.

Usando nodos x_i equiespaciados obtenemos el siguiente algoritmo:

Algoritmo (Euler Explicito)
Para $i = 0, \ldots, N-1$
$\quad x_i = a + ih$
$\quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
fin i.

Observación. Si se considera la aproximación de la derivada y' por

$$y'(x) \approx \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$$

y procediendo como antes se obtiene el siguiente algoritmo:

Algoritmo (Euler Implicito)
Para $i = 0, \ldots, N-1$
$\quad x_i = a + ih$
$\quad y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$
fin i.

Ambos métodos proporcionan ejemplos de *métodos de un paso* ya que para calcular la solución numérica y_{n+1} en el nodo x_{n+1} sólo necesitamos la información relacionada con el nodo anterior x_n. Más concretamente, en el método de Euler explicito y_{n+1} depende exclusivamente del valor un calculado previamente, mientras que en el método de Euler implicito depende también de él mismo a través del valor de y_{n+1}.

Ejemplo. La discretización de $y' = 5y + yx^2(1-y)$ por el método de Euler explícito requiere en cada paso el simple cálculo de

$$y_{n+1} = y_n + h(5y_n + y_n x_n^2(1-y_n))$$

mientras que utilizando el método de Euler implícito debemos resolver la ecuación no lineal

$$y_{n+1} = y_n + h(5y_{n+1} + y_{n+1}x_{n+1}^2(1-y_{n+1}))$$

De este modo, los métodos implícitos son más costosos que los métodos explícitos, ya que en cada paso x_{n+1} debemos resolver un problema no lineal para calcular y_{n+1}. Sin embargo, veremos que los métodos implícitos gozan de mejores propiedades de estabilidad que los métodos explícitos.

Sistemas de E.D.O.

Considere el P.V.I. definido por el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)), \\ \quad\vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)), \qquad x \in [a,b], \\ y_1(a) = y_{10}, \ \ldots, \ y_n(a) = y_{n0} \ \ \text{(dados)}. \end{cases}$$

el sistema se escribe: $\begin{cases} \boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x)), \quad x \in [a,b], \\ \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{y}_0 \ \ \text{(dado)}, \end{cases}$

donde

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Los métodos numéricos vistos para una ecuación se generalizan directamente al caso de un sistema de n ecuaciones de primer orden.

Ejemplo. Considere un sistema con dos ecuaciones ($n = 2$):

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)), \quad x \in [a,b], \\ y_1(a) = y_{10}, \quad y_2(a) = y_{20} \quad \text{(dados)}, \end{cases}$$

o, en su forma vectorial,

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x)), \quad x \in [a,b], \\ \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{y}_0 \ \ \text{(dado)}. \end{cases}$$

El método de Euler explícito se expresa como sigue:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_0 : \ \text{dato}, \\ \boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h\boldsymbol{f}(x_i, \boldsymbol{y}_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

o bien por componentes:

$$\begin{cases} y_{10}, \ y_{20} : \text{datos}, \\ y_{1,i+1} = y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Todos los otros métodos numéricos estudiados se pueden formular similarmente en forma vectorial para sistemas.

E.D.O. de orden superior

Una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

se puede expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden al definir

$$\boldsymbol{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\boldsymbol{z}'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_3(x) \\ \vdots \\ f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n) \end{pmatrix} =: \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z})$$

y luego, $\boldsymbol{z}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z})$ es un sistema de E.D.O. de primer orden al que se pueden aplicar los métodos numéricos vistos.

Por el mismo procedimiento, un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior, también puede expresarse mediante un sistema de E.D.O. de primer orden.

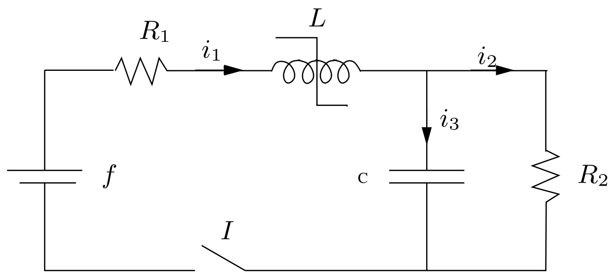

Figura 1: Circuito eléctrico

Ejemplo. Considere el circuito eléctrico de la Figura 1. Queremos calcular la función $v(t)$ que representa la caída de potencial en los extremos del condensador C partiendo del instante inicial $t = 0$ en el cual ha sido apagado el interruptor I. Supongamos que la inductancia L puede expresarse como función explícita de la intensidad actual i, esto es $L = L(i)$. La ley de Ohm da

$$e - \frac{d(i_1 L(i_1))}{dt} = i_1 R_1 + v$$

donde R_1 es una resistencia. Suponiendo que los flujos de corriente se dirigen como se indica en la Figura 1, derivando con respecto a t ambos miembros de la ley de Kirchoff $i_1 = i_2 + i_3$ y observando que $i_3 = C dv/dt$ e $i_2 = v/R_2$, obtenemos la ecuación adicional

$$\frac{di_1}{dt} = C\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R_2}\frac{dv}{dt}.$$

Por tanto hemos encontrado un sistema de dos ecuaciones diferenciales cuya solución permite la descripción de la variación a lo largo del tiempo de las dos incógnitas i_1 y v.

Supongamos que $L(i_1) = L$ es constante y que $R_1 = R_2 = R$ entonces v es solución del problema

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{dv}{dt} + 2v = e.$$

En este caso, v puede obtenerse resolviendo el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = -\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{L}{R} + RC\right) z_2(t) - \dfrac{2}{LC} z_1(t) + \dfrac{e}{LC}. \end{cases} \tag{1}$$

con condiciones iniciales $z_1(0) = z_2(0) = 0$.

Resolvemos el problema anterior utilizando *ode45* de MATLAB considerando $L = 0{,}1$ henrios, $C = 10^{-3}$ $R = 10$ ohmios y $e = 5$ voltios donde henrio, faradio, ohmio y voltio son, respectivamente, las unidades de medida de inductancia, capacitancia, resistencia y voltaje.

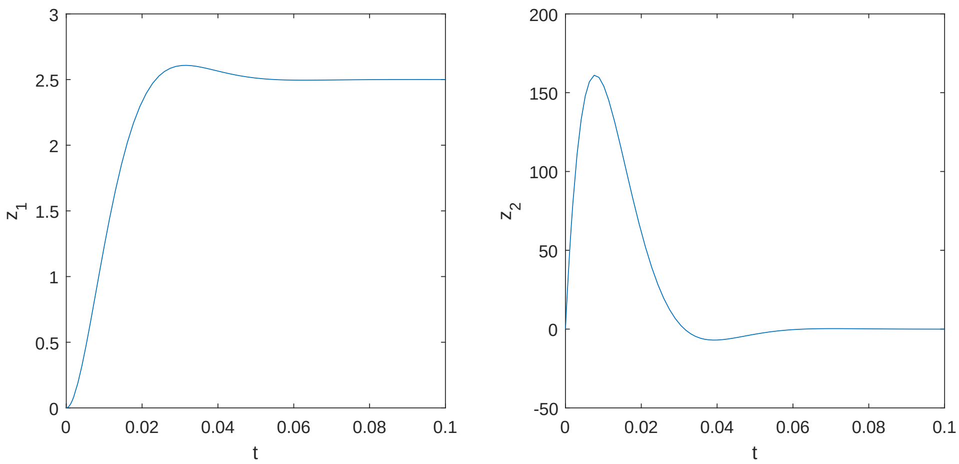

Figura 2: Soluciones numéricas del sistema (1). La caída de potencial $v(t)$ se muestra a la izquierda, su derivada dv/dt a la derecha.

En la Figura 2 mostramos los valores aproximados de z_1 y z_2 que corresponden a v y dv/dt, respectivamente. Como se esperaba, $v(t)$ tiende a $e/2 = 2{,}5$ voltios para t grande.

DMH/VAD.