UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Esquemas numéricos para leyes de conservación con flujo restringido

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío.

Yessennia Martínez Martínez

Concepción, 2018.

Esquemas numéricos para leyes de conservación con flujo restringido.

por

Yessennia Martínez Martínez

Comisión examinadora:

Dr. Luis Miguel Villada

Orientador

Universidad del Bío-Bío, Chile

Dr. Erwan Hingant

Profesor Informante

Universidad del Bío-Bío, Chile

Dr. Raimund Bürger

Profesor Informante

Universidad de Concepción, Chile

Esquemas numéricos para leyes de conservación con flujo restringido.

Yessennia Martínez Martínez

Universidad del Bío-Bío.

Julio, 2018.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por guiarme en este proceso, darme salud y permitirme cumplir mis sueños.

A mi familia en especial a mi mamá Liliana Martínez, a mi papá Mariano Garrido, a mis hermanos Gabriel Garrido, John Garrido y Hans Garrido y a mis abuelos Zoila Espinoza y Ramón Martínez por todo su apoyo incondicional y regaloneos durante todo este proceso.

A mi pareja José Cornejo por todo su apoyo y paciencia, y por tolerar mis momentos de estrés y no dejarme caer en los momentos difíciles de este último tiempo.

A mis compañeros y amigos Vanessa, Natalia y Pedro por la ayuda brindada para lograr esto con ánimo y un poco de distracción cuando era posible.

A mi profesor guía Luis Miguel Villada por aceptar trabajar conmigo, por atender a mis dudas, por su disposición y ayuda en colaborar en todo lo que requería para hacer esto posible.

Gracias a todos quienes confiaron en que sí podría lograr terminar con éxito este proceso.

Resumen

En este trabajo estudiamos y analizamos conceptos básicos de leyes de conservación, así como también repasamos la teoría básica de métodos de volúmenes finitos. Luego estudiamos leyes de conservación con una restricción constante [1] y con restricción no local [2] desde el punto de vista analítico y su aproximación numérica mediante esquemas de primer y de segundo orden. Aplicaciones tales como dinámica del flujo vehicular debido a medidas de control (semáforos, reducción de velocidad, entre otros) o dinámica de peatones con restricción en el flujo de salida son estudiadas para estos modelos. Finalmente, estudiamos la solución de entropía de un problema de acoplamiento EDO-EDP [13], con el cual se modela la presencia de un vehículo lento en carretera afectando a los vehículos rápidos.

Abstract

In this work we study and analyze basic concepts of conservation laws, as well as review the basic theory of finite volume methods. Later we study conservation laws with a constant constraint [1] and with non-local constraint [2] from the analytical point of view and their numerical approximation using first and second order schemes. Applications such as vehicular flow dynamics due to control measures (traffic lights, speed reduction, among others) or pedestrian dynamics with constraint in the flow of output are studied for these models. Finally, we study the entropy solution of an EDO-EDP [13] coupling problem, with which the presence of a slow vehicle on the road is modeled, affecting fast vehicles.

Índice general

Agradecimientos I

Resumen II

Abstract III

1. Introducción 1

2. Preliminares 5

2.1. Modelos de tráfico vehicular 7

2.1.1. Modelo Lighthill-Whitham-Richards 7

2.1.2. Leyes de conservación 9

2.2. Flujo con coeficiente discontinuo 23

3. Esquemas Numéricos 27

3.1. Discretización del dominio 27

3.2. Esquema conservativo, consistente y monótono 28

3.3. Flujos numéricos 31

3.4. Esquemas de alto orden 32

3.5. Ejemplos numéricos 34

4. Ley de conservación con restricción de flujo constante en espacio 43

4.1. Modelo 43

4.2. Esquema Numérico 51
4.3. Modificación del algoritmo (4.12)-(4.14) usando esquemas de segundo orden 56
4.4. Resultados numéricos y aplicaciones 58

5. Ley de Conservación con restricción no local 71

5.1. Modelo 71
5.2. Esquema Numérico 74
5.3. Resultados numéricos y aplicaciones 78

6. Ley de conservación con acoplamiento EDO-EDP 84

6.1. Modelo 84

7. Conclusiones 93

Capítulo 1

Introducción

Modelar el comportamiento de automóviles sobre vías urbanas ha sido de principal interés en los últimos años para matemáticos e ingenieros, esto producto de la congestión que genera el alto número de vehículos en las vías, así como también la interacción de vehículos particulares y del servicio público, ya que los últimos necesariamente deben ir a una velocidad menor, ver Figura 1.1(a). Otro factor que puede generar congestión es la presencia de diferentes semáforos en vías ya que en intervalos de tiempo produce represamiento de vehículos. Por otro lado, también se puede observar congestión en una sala de clases, ver Figura 1.1(b), esto debido a la presencia de una puerta que actúa como obstáculo en la salida. Dichos fenómenos se pueden entender bajo el punto de vista matemático, ya que es posible modelarlos mediante un tipo de ecuaciones diferenciales parciales.

(a) (b)

Figura 1.1: (a) Congestión en el sistema de tráfico vehicular en la ciudad de Concepción. (b) Congestión en el sistema de tráfico de peatones en una sala de clases.

La teoría de flujo de tráfico vehicular y modelado comenzó en los años $'30$, el pionero fue el estadounidense Bruce D. Greenshields [16]. Sin embargo, en los $'90$ ha tomado una gran relevancia ya que la demanda global de tráfico ha aumentado.

Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones diferenciales parciales escalares tipo hiperbólicas han sido utilizadas para describir el comportamiento de vehículos en una carretera [12], y también para otras aplicaciones tales como crowd dynamic [9], procesos de sedimentación de partículas [7].

La ecuación diferencial parcial hiperbólica considerada para este modelamiento es la propuesta independientemente por Lighthill-Whitham [23] y Richards [25], dada por

$$\rho_t + (f(\rho))_x = 0 \qquad\qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

donde $\rho \in [0, \rho_{\text{máx}}]$ representa la densidad de vehículos y $f(\rho) = \rho v(\rho)$ es el flujo, con $v(\rho)$ la velocidad. La ecuación (1.1) junto a una condición inicial

$$\rho(0, x) = \rho_0(x) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

representan una ley de conservación que ha sido estudiada para un flujo $f(\rho)$ general desde el punto de vista matemático por diversos autores [5, 6, 14, 15, 18, 20], demostrando el buen planteamiento del problema y la existencia de una única solución débil denominada solución de entropía. A partir de datos iniciales constantes a trozos, esta solución está compuesta por discontinuidades o choques separando dos estados que viajan a velocidad finita y rarefacciones las cuales son soluciones continuas que conectan dos estados.

Los métodos de volúmenes finitos explícitos son utilizados para estudiar la ley de conservación (1.1)-(1.2), y se demuestra que bajo una condición CFL la solución discreta converge a la solución de entropía de la ley de conservación.

Por otra parte, en [1] se estudia el buen planteamiento de una ley de conservación (1.1)-(1.2) junto con la restricción de flujo en un punto

$$f(\rho(t, 0)) \leq F(t), \qquad\qquad t > 0, \tag{1.3}$$

la cual tiene aplicaciones en dinámica de peatones [2] y en tráfico vehicular haciendo posible modelar la presencia de medios de control. La solución de una ley de conservación con flujo restringido introduce un nuevo choque debido a la restricción, denominado choque no clásico. También, en [1] se estudia la convergencia de un esquema de volúmenes finitos de primer orden a la solución de entropía de (1.1)-(1.2)-(1.3).

En [12] se propone y estudia un modelo que permite describir la influencia de un vehículo lento en el tráfico relacionando una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) que describe la dinámica de la densidad de vehículos acoplada con una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) que representa la trayectoria de un vehículo lento en la vía, dado por

$$\begin{cases} \rho_t + f(\rho)_x = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ f(\rho(t,y(t))) - \dot{y}\rho(t,y(t)) \leq F_\alpha = \dfrac{\alpha}{4}(1-\dot{y}(t))^2 & t \in \mathbb{R}^+ \\ \dot{y}(t) = \omega(\rho(t,y(t)+)) & t \in \mathbb{R}^+ \\ y(0) = y_0 & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{1.4}$$

donde y denota la posición del vehículo, $\dot{y}(t) = \omega(\rho(t,y(t)+))$ es la EDO que describe la trayectoria de un vehículo lento, $\omega(\rho) = V_b$, si $\rho \leq \rho^* = (1-V_b)$, y $\omega(\rho) = v(\rho)$, en otro caso, describe la velocidad de un vehículo lento, y α es una constante, $\alpha \in]0,1[$.

Basándose en lo descrito anteriormente, en el Capítulo 2 se realiza un repaso a la teoría de leyes de conservación escalares y en el Capítulo 3 se revisa la teoría de métodos de volúmenes finitos para leyes de conservación, entre ellos esquemas de primer y segundo orden. Posteriormente, en el Capítulo 4 se estudia la teoría de leyes de conservación con restricción constante en el flujo, estudiando las soluciones analíticas y un esquema numérico de primer orden propuesto para este tipo de ecuaciones con flujo restringido, luego se usan esquemas de segundo orden, sin embargo, en los test numéricos se observa que la solución numérica obtenida con estos esquemas presenta overshoots y para eliminarlos se realiza una modificación al esquema de segundo orden. Luego, en el Capítulo 5 se repasa la teoría de leyes de conservación con restricción no local, estudiando una solución analítica y un esquema numérico de primer orden propuesto para este tipo de leyes de conservación, además se implementa el esquema se segundo orden modificado en el Capítulo anterior. Finalmente, en el Capítulo 6 se estudia la teoría de una ley de conservación con un acoplamiento EDO-EDP, resolviendo problemas de manera analítica.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se resume la teoría básica para el estudio de leyes de conservación. De acuerdo a la teoría para tráfico vehicular presentada en [16] es posible determinar:

- El flujo de tráfico, $f(t,x)$, el cual es el número de vehículos $\Delta N \in \mathbb{Z}^+$ pasando una cierta ubicación x en un intervalo de tiempo Δt dado por $f(t,x) = \Delta N/\Delta t$.

- La velocidad media aritmética, que es la velocidad promedio de ΔN vehículos pasando una sección durante un intervalo de agregación

$$V(t,x) = \frac{1}{\Delta N} \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} v_\alpha.$$

- La densidad de tráfico, $\rho(t,x)$, usando una relación hidrodinámica

$$\rho(t,x) = \frac{f(t,x)}{V(t,x)} = \frac{flujo}{velocidad}.$$

Cuando se describe el flujo de tráfico en carreteras con $I > 1$ carriles, se distinguen

- Las densidades de un carril $\rho_i(t,x)$ en el carril $i = 1,\ldots,I$.

- La densidad total $\rho_{tot}(t,x)$ sobre todos los carriles.

- La densidad media por carril $\rho(t,x)$, también llamada densidad efectiva, definida por $\rho(t,x) = \dfrac{\rho_{tot}(t,x)}{I}$.

Considerando un tramo de carretera de longitud Δx homogénea, es decir, sin fallas ni cambios de carril, las definiciones de densidades locales y velocidades implican que la longitud Δx debe ser microscópicamente grande a modo de contener suficientes vehículos para obtener cantidades macroscópicas, y macroscópicamente pequeña para que los gradientes de densidades y flujo sean aproximadamente constantes en la sección de carretera. Entonces, el número de vehículos en la sección de carretera en el tiempo t está dado por

$$n(t) = \int_{x}^{x+\Delta x} \rho_{tot}(t,x')dx' \approx \rho_{tot}(t,x)\Delta x. \tag{2.1}$$

Como se asumió una sección de carretera homogénea, cambia el número de vehículos que sólo pueden ser causados por la entrada f_{in} o salida f_{out} en los límites de la sección. Estos flujos de contorno están dados por $f_{tot}(t,x)$ y $f_{tot}(x+\Delta x,t)$ respectivamente, resultando en el balance de flujo

$$\frac{dn}{dt} = f_{in}(t) - f_{out}(t) = f_{tot}(t,x) - f_{tot}(t,x+\Delta x),$$

combinando esta relación con la derivada del tiempo de (2.1)

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{tot}\Delta x) = \Delta x \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t},$$

se obtiene

$$\frac{\partial \rho_{tot}(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x}\frac{dn}{dt} = -\frac{f_{tot}(t,x+\Delta x) - f_{tot}(t,x)}{\Delta x} \approx -\frac{\partial f_{tot}(x,t)}{\partial x}.$$

Y finalmente, usando la relación hidrodinámica de flujo-velocidad $f_{tot} = \rho_{tot} \cdot V$

$$\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{tot}V)}{\partial x} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0.$$

Dado que para una sección de la carretera, el número I de carriles es constante, la ecuación de continuidad para la densidad efectiva $\rho = \dfrac{\rho_{tot}}{I}$ tiene la misma forma.

Para más información sobre cómo modelar tráfico vehicular ver [14, 28].

2.1. Modelos de tráfico vehicular

2.1.1. Modelo Lighthill-Whitham-Richards

El modelo propuesto de forma independiente por Lighthill-Whitham [23] y Richards [25] está basado en la conservación de autos, y se describe por la ecuación

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0, \tag{2.2}$$

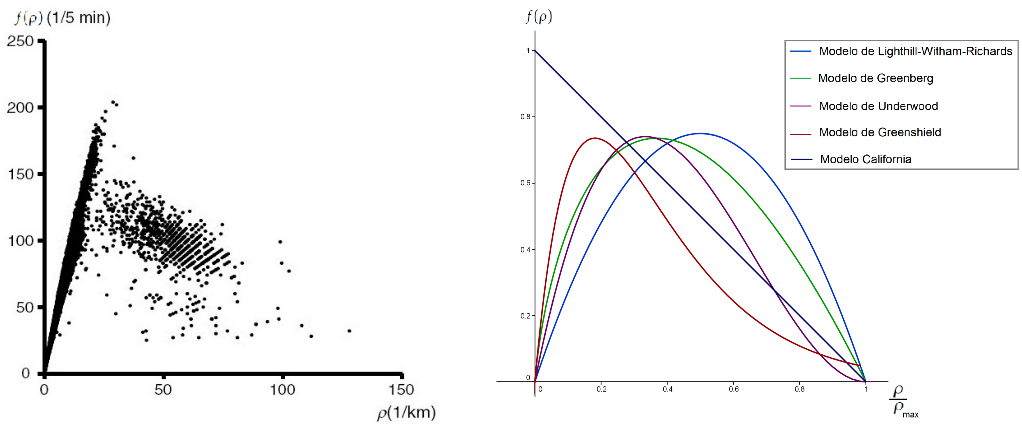
donde ρ representa la densidad de los autos y $f(\rho)$ es el flujo dado por $\rho v(\rho)$, siendo $v(\rho)$ la velocidad media como una función que depende sólo de la densidad. Se supone f como una función de clase C^1, estrictamente cóncava y $f(0) = f(\rho_{\text{máx}}) = 0$, además, se asume $\rho_{\text{máx}} = 1$.

Diagramas Fundamentales

Definición 2.1.1. *Un diagrama fundamental es la ley que da el flujo en función de la densidad.*

En la Figura (2.1) se representa la relación entre ρ y $f(\rho)$ para datos tomados experimentalmente [29], observando que el diagrama crece de forma lineal hasta una concentración crítica y luego disminuye drásticamente hasta una máxima concentración, por lo cual se han propuesto diversos diagramas para su modelado. El diagrama más sencillo es obtenido haciendo v como una función lineal de la densidad, esto es

$$v(\rho) = v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{máx}}}.\right)$$



(a) (b)

Figura 2.1: (a) Diagrama fundamental que muestra la relación entre la densidad y el flujo [29]. (b) Diagramas fundamentales propuestos.

Los diagramas expuestos en la Figura 2.1(b), descritos en [14], son:

- El considerado por Greenberg, en el cual la función velocidad es $v(\rho) = v_0 \log(\frac{\rho_{\text{máx}}}{\rho})$, donde v_0 es una constante positiva.

- El modelo de Underwood, para quien la función velocidad es $v(\rho) = v_{\text{máx}} e^{\left(-\frac{\rho}{\rho_{\text{máx}}}\right)}$, en el cual se supone que la velocidad media no es cero incluso si la densidad es la máxima posible.

- El modelo de Greenshields, en el cual la función velocidad es $v(\rho) = v_{\text{máx}} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{máx}}}\right)^n\right)$, donde $n \in \mathbb{N}$.

- El modelo California, en el cual la función velocidad está descrita por $v(\rho) = v_0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\text{máx}}}\right)$.

En el presente escrito se considera el modelo de Greenshields para $n = 1, 2$ con $v_{\text{máx}} = 1$ y $\rho_{\text{máx}} = 1$, es decir, flujos de la forma $f(\rho) = \rho(1 - \rho)$ y $f(\rho) = \rho(1 - \rho)^2$.

2.1.2. Leyes de conservación

Definición 2.1.2. *Una ley de conservación en un espacio unidimensional se escribe como la ecuación (2.2), donde* $\rho : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es la cantidad conservada y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es el flujo.*

Observación 2.1.1. *Para simplificar la notación, en ocasiones, se denotará como* ρ *a* $\rho(t, x)$.

Se busca dar solución a (2.2), para lo cual se definen los siguientes problemas.

Definición 2.1.3. *Un problema de Cauchy es el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \rho_t + (f(\rho))_x = 0, & x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde ρ_0 *es una función conocida.*

Definición 2.1.4. *Un problema de Riemann para la ecuación (2.2) es el problema de Cauchy con dato inicial*

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_l & si \quad x < 0, \\ \rho_r & si \quad x > 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

donde $\rho_l, \rho_r \in \Omega$*, con* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *un conjunto abierto y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es un flujo suave.*

A continuación se detallan las soluciones del problema (2.3)-(2.4).

Método de características

Sea la ecuación cuasilineal

$$a(t, x, \rho)\rho_t + b(t, x, \rho)\rho_x = c(t, x, \rho), \tag{2.5}$$

se considera la solución como una superficie $\{(t, x, \rho(t, x))/(t, x) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea Γ una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\eta \to (t(\eta), x(\eta), z(\eta))$. Se busca construir una superficie

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizada por $(t, x, \rho(t,x))$ tal que $\Gamma \subseteq S$ y $\rho(t,x)$ resuelva (2.5), para lo cual se plantean y resuelven los siguientes problemas de valores iniciales

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = a \quad t(\xi_0, \eta) = t(\eta), \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} = b \quad x(\xi_0, \eta) = x(\eta), \qquad \frac{\partial z}{\partial \xi} = c \quad z(\xi_0, \eta) = z(\eta),$$

las cuales se llaman **ecuaciones características** y la solución a cada problema de valor inicial se llama **características**, esto significa que la solución es constante a lo largo de las curvas características. Este método es usado para encontrar soluciones explícitas de leyes de conservación.

Para resolver el problema de Cauchy (2.3) usando este método, las curvas características están dadas por la ecuación $x = \eta + f'(\rho_0(\eta))t$ y su solución es $\rho(t,x) = \rho_0(\eta)$, con η despejada de la ecuación de curvas características.

Ejemplo 1. *Considerando el problema de Riemann*

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \rho(0,x) = sen(x,) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

las curvas características están definidas por $x = \eta + t$.

Así, solución explícita es $\rho(t,x) = sen(x - t)$.

Ejemplo 2. *Considerando el problema de Riemann* (2.4) *con* $f(\rho) = \rho(1-\rho)$.

2.1 *para* $\rho_0(x) = \begin{cases} 0.1 & si\ x < 0, \\ 0.8 & si\ x > 0. \end{cases}$

Las curvas características están dadas por $x = \eta + (1 - 2\rho_0(x))t$, *así,*

$$x = \begin{cases} \eta + 0.8t & x < 0, \\ \eta - 0.6t & x > 0. \end{cases}$$

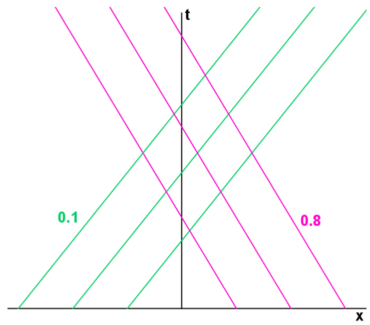


Figura 2.2: Curvas características ejemplo 2.1

En este caso, se observa en la Figura 2.2 las curvas características se intersectan en un tiempo finito, con lo cual la solución ρ es multievaluada.

2.2 *Con* $\rho_0(x) = \begin{cases} 0.8 & si\ x < 0, \\ 0.1 & si\ x > 0. \end{cases}$

Las curvas características están dadas por $x = \eta + (1 - 2\rho_0)t$, *así,*

$$x = \begin{cases} \eta - 0.6t & x < 0, \\ \eta + 0.8t & x > 0. \end{cases}$$

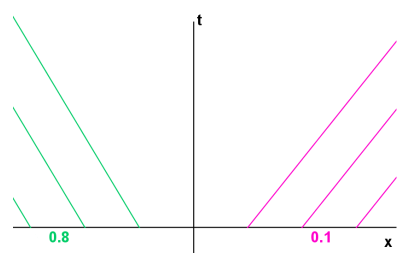


Figura 2.3: Curvas características ejemplo 2.2

En este caso, se observa en la Figura 2.3 que las curvas no chocan pero, la pregunta es ¿qué solución hay por dónde no pasan las curvas características? Esto se tratará a continuación, definiendo antes el concepto de solución débil.

Solución débil

Definición 2.1.5. *Sean* $\rho_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *y* $T > 0$. *Una función* $\rho : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una solución débil al problema de Cauchy (2.3) si* ρ *es una función continua en* $[0,T]$ *sobre* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *y si, para cada función* ψ *de clase* C^1 *con soporte compacto contenida en el conjunto* $]-\infty, T[\times\mathbb{R}$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\rho \cdot \psi_t + f(\rho) \cdot \psi_x)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) \cdot \psi(0,x) dx = 0. \tag{2.6}$$

Hasta ahora se han definidos dos tipos de soluciones para leyes de conservación, relacionadas por el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1. *Una solución clásica de una ley de conservación es también una solución débil de la ley de conservación.*

Demostración. Multiplicando la ley de conservación (2.2) por $\psi \in C^1((0,T) \times \mathbb{R})$, una función test con soporte compacto, donde $\psi(t,x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, e integrando por partes obtenemos

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho\psi_t \; dx \; dt + \int_{\mathbb{R}} \rho\psi \; dx \Big|_0^T - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f(\rho)\psi_x \; dx \; dt + \int_0^T f(\rho) \; \psi \; dt \Big|_{\partial\mathbb{R}} = 0,$$

como $\psi(t,x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, se tiene que $\displaystyle\int_0^T f(\rho)\psi = 0$ en $\partial\mathbb{R}$.

Además, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho\psi \; dx = 0$ en T. $\square$

La solución débil permite definir una discontinuidad como parte de la solución, tal discontinuidad conecta dos estados ρ_l y ρ_r, de (2.3) con condición inicial (2.4), es decir,

$$\rho(t,x) = \begin{cases} \rho_l & x \leq st \\ \rho_r & x \geq st. \end{cases}$$

Teorema 2.1.2 (Condición de Rankine-Hugoniot)**.** *Una solución débil acotada* ρ *para el problema de Riemann* (2.4) *con condición inicial* (2.4) *con una discontinuidad de salto* *aproximada s satisface*

$$s(\rho_r - \rho_l) = f(\rho_r) - f(\rho_l). \tag{2.7}$$

Demostración. Para analizar qué discontinuidades de la solución ρ son compatibles con la solución débil, se supone una discontinuidad que se desplaza a lo largo de una curva $\Gamma(t, x(t))$.

Sea $\rho(t, x)$ una solución débil que tiene una discontinuidad a lo largo de Γ y uniformemente acotada en D, donde $D = D_1 \cup D_2$, D_1 es tal que $\rho|_{D_1^\circ} = \rho_l$ y D_2 es tal que $\rho|_{D_2^\circ} = \rho_r$ y sea $\psi(x, t)$ una función con soporte en D. Situación que se bosqueja en la Figura 2.4. Definiendo $\quad D_i^\varepsilon = \{(t, x) \in D_i / dist\,((t, x), (t, x(t))) > \varepsilon\}, \quad i = 1, 2.$

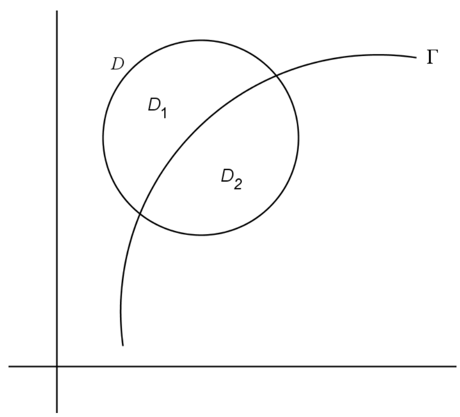


Figura 2.4: Vecindad D a lo largo de la curva Γ

Aplicando la condición de solución débil para ρ

$$\int_D (\rho\psi_t + f(\rho)\psi_x)\, dt\, dx + \int_{\mathbb{R}} \rho(0, x)\psi(0, x) dx = 0.$$

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho(0, x)\psi(0, x) dx = 0$, entonces

$$0 = \int_D (\rho\psi_t + f(\rho)\psi_x)\, dt\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_1^\varepsilon \cup D_2^\varepsilon} (\rho\psi_t + f(\rho)\psi_x)\, dt\, dx$$

Como ρ es solución débil en D_1^ε y D_2^ε, como $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_i^\varepsilon} [(\rho\psi)_t + (f(\rho)\psi)_x]\, dt\, dx = 0$ entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{D_i^\varepsilon}(\rho\psi_t+f(\rho)\psi_x)\,dt\,dx+\int_{D_i^\varepsilon}(\rho_t+f(\rho)_x)\,\psi\,dt\,dx\right]=0.$$

Así, $0=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{D_i^\varepsilon}[(\rho\psi)_t+(f(\rho)\psi)_x]\,dt\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{D_i^\varepsilon}[(f(\rho)\psi)_x-(-\rho\psi)_t]\,dt\,dx.$

Aplicando teorema de Green a la igualdad anterior

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_i^\varepsilon}\psi\,[-\rho\ dx+f(\rho)\ dt]\,dt\,dx=0.$$

Como $\psi=0$ en ∂D_i^ε, excepto en la cercanía de $x(t)$, denominando a esta región Γ_i^ε, entonces

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_i^\varepsilon}[-\rho\psi\ dx+f(\rho)\psi\ dt]=0$, así

$\int_{D_1\cap\Gamma}[-\rho\psi\ dx+f(\rho)\psi]\ dt-\int_{D_2\cap\Gamma}[-\rho\psi\ dx+f(\rho)\psi]\ dt=0$, además

$\int_{\Gamma\cap D}[-\rho_l\psi\ dx+f(\rho_l)\psi]\ dt-\int_{\Gamma\cap D}[-\rho_r\psi\ dx+f(\rho_r)\psi]\ dt=0$, por tanto

$\int_{\Gamma\cap D}\psi\,[-(\rho_l-\rho_r)\ dx+(f(\rho_l)-f(\rho_r))\ dt\,]\ =0.$

Como ψ tiene soporte en D, $(\rho_l-\rho_r)-(f(\rho_l)-f(\rho_r))=0$ entonces

$$s=\frac{dx}{dt}=\frac{f(\rho_l)-f(\rho_r)}{\rho_l-\rho_r}.$$

$\square$

Ejemplo 3. *Considerando el Ejemplo 2*

3.1 *Para* 2.1*, se tiene que la condición de R-H es* $s=\dfrac{f(0.8)-f(0.1)}{0.8-0.1}=0.1$

Así la solución débil del ejemplo 3.1 es

$$\rho(t,x)=\begin{cases}0.1 & si\ x<0.1t,\\ 0.8 & si\ x>0.1t.\end{cases}$$

En la Figura 2.5 se representan las curvas características el choque generado.

3.2 *Para* 2.2*, considerando la siguiente situación, con dos nuevas soluciones intermedias,* α *y* $1-\alpha$*, representados en la Figura 2.6.*

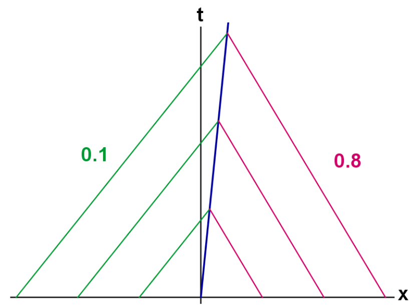


Figura 2.5: Curvas características Ejemplo 3.1

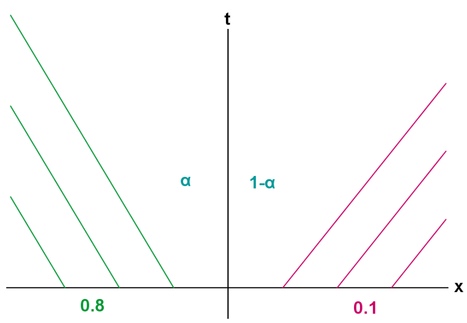


Figura 2.6: Curvas caracterícticas Ejemplo 3.2

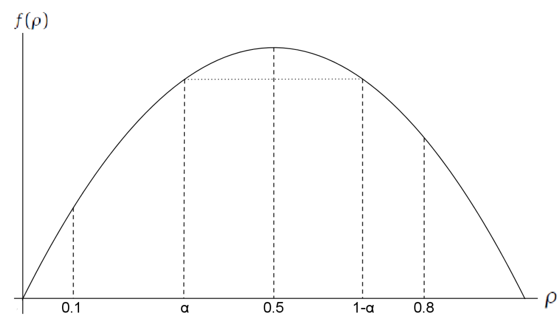


Figura 2.7: Representación del flujo $f(\rho)$ en $[0, 1]$

En la Figura 2.7 se observa que α *debe cumplir que* $0.1 < \alpha < 0.5$ *y* $0.5 < 1-\alpha < 0.8$, *es decir,* $0.2 < \alpha < 0.5$.

Luego, $\rho_0 = 0.8$ *y* $\rho_0 = \alpha$ *chocan a velocidad* $s_1 = \dfrac{f(0.8) - f(\alpha)}{0.8 - \alpha} = 0.2 - \alpha.$

$\rho_0 = \alpha$ *y* $\rho_0 = 1 - \alpha$ *chocan a velocidad* $s_2 = \dfrac{f(\alpha) - f(1-\alpha)}{\alpha - (1-\alpha)} = 0.$

$\rho_0 = 1 - \alpha$ *y* $\rho_0 = 0.1$ *chocan a velocidad* $s_3 = \dfrac{f(1-\alpha) - f(0.1)}{1 - \alpha - 0.1} = \alpha - 0.1.$

Así, la solución del Ejemplo 3.2 es

$$\rho(t,x) = \begin{cases} 0.8 & si\ x < (0.2-\alpha)t, \\ \alpha & si\ (0.2-\alpha)t < x < 0, \\ 1-\alpha & si\ 0 < x < (\alpha - 0.1)t, \\ 0.1 & si\ x > (\alpha - 0.1)t. \end{cases}$$

Por tanto, existe una solución débil para cada $\alpha \in (0.2, 0.5)$.

Esto hace plantear que no existe sólo una solución débil, sino infinitas, es por ello que se define un nuevo concepto para garantizar unicidad de la solución.

Solución de entropía

Para que se produzca un choque necesariamente las curvas características se cortan, verificando la siguiente definición.

Definición 2.1.6 (Condición de entropía de Lax)**.** *Para una ley de conservación, con* f *cóncavo, una discontinuidad de propagación con velocidad* s*, dada por la ecuación* (2.1.2)*, satisface la condición de entropía de Lax si*

$$f'(\rho_l) > s > f'(\rho_r), \tag{2.8}$$

requiriendo que $\rho_l < \rho_r$.

Definición 2.1.7 (Condición de entropía de Liu)**.** *Sea* ρ *una solución débil de* (2.2) *y sean* ρ_l*,* ρ_r *los valores de las trazas de un choque de velocidad* s*. La solución satisface la condición de entropía de Liu si*

$$\frac{f(\kappa)-f(\rho_r)}{\kappa-\rho_r} \leq s \leq \frac{f(\kappa)-f(\rho_l)}{\kappa-\rho_l}, \tag{2.9}$$

para todo κ *entre* ρ_l *y* ρ_r.

Lema 1. *Dado al problema de Riemann (2.4), se produce un choque si*

- *para $\rho_l < \rho_r$ la gráfica de $f(\rho)$ debe estar sobre la recta secante que conecta $(\rho_l, f(\rho_l))$ con $(\rho_r, f(\rho_r))$.*
- *para $\rho_l > \rho_r$ la gráfica de $f(\rho)$ debe estar bajo la recta secante que conecta $(\rho_l, f(\rho_l))$ con $(\rho_r, f(\rho_r))$.*

Definición 2.1.8. *Una función $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es una entropía para (2.2) si es convexa y existe una función $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que*

$$\eta'(\rho) f'(\rho) = q'(\rho), \tag{2.10}$$

para cada $\rho \in \mathbb{R}$. La función q se dice que es un flujo entrópico para η. El par (η, q) se llama par de entropía de (2.2).

Teorema 2.1.3 (Condición de entropía de Kruzkov [19])**.** *Una solución débil ρ del problema de Cauchy (2.3) satisface la condición de entropía admisible de Kruzkov si*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(|\rho - k| \varphi_t + sgn(\rho - k)(f(\rho) - f(k)) \varphi_x \right) \, dx \, dt \geq 0, \tag{2.11}$$

para cada $k \in \mathbb{R}$ y cada función de clase C^1 $\varphi \geq 0$ con soporte compacto en $[0, T[\times \mathbb{R}$.

Demostración. Considerando el problema viscoso $\rho_t + f(\rho)_x = \varepsilon \rho_{xx}$, una función convexa $\eta(\rho) = |\rho - k|$ y una función test no negativa $\varphi \in C_0^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$. Así, integrando sobre $(0, T) \times \mathbb{R}$ se obtiene

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\rho_t + f(\rho)_x - \varepsilon \rho_{xx} \right] \eta'(\rho) \varphi \, dx \, dt = 0,$$

equivalente a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\rho_t \eta'(\rho) \varphi + f(\rho)_x \eta'(\rho) \varphi - \varepsilon \rho_{xx} \eta'(\rho) \varphi \right] \, dx \, dt = 0.$$

Donde

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\rho_t\eta'(\rho)\varphi\ dx\ dt &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^T \eta(\rho)_t\varphi\ dt\ dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[\eta(\rho)\varphi\ \Big|_0^T - \int_0^T \eta(\rho)\varphi_t\ dt\ \right] dx = -\int_{\mathbb{R}}\int_0^T \eta(\rho)\varphi_t\ dt\ dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}}\int_0^T |\rho-k|\varphi_t\ dt\ dx\end{aligned}$$

Ahora considerando $q'(\rho)=f'(\rho)\eta'(\rho)$,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f(\rho)_x\eta'(\rho)\varphi\ dx\ dt &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}} q(\rho)_x\varphi\ dx\ dt\\ &= \int_0^T\left[q(\rho)\varphi\ \Big|_{\partial\mathbb{R}} - \int_{\mathbb{R}} q(\rho)\varphi_x\ dx\right]\ dt = -\int_0^T\int_{\mathbb{R}} q(\rho)\varphi_x\ dx\ dt.\end{aligned}$$

Donde $q(\rho)=\begin{cases} f(\rho)-f(k) & \text{si } \rho>k\\ -f(\rho)+f(k) & \text{si } \rho<k\end{cases} = sgn(\rho-k)\,(f(\rho)-f(k)).$

Luego,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} f(\rho)_x\eta'(\rho)\varphi\ dx\ dt = -\int_0^T\int_{\mathbb{R}} sgn(\rho-k)\,(f(\rho)-f(k))\,\varphi_x\ dx\ dt.$$

Como $\eta(\rho)_{xx}=\eta''(\rho)\rho_x+\eta'(\rho)\rho_{xx}$, entonces

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} -\varepsilon\rho_{xx}\eta'(\rho)\varphi\ dx\ dt = \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left[\varepsilon\eta''(\rho)\rho_x\varphi-\varepsilon\eta(\rho)_{xx}\varphi\right]\ dx\ dt.$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^T\left[-|\rho-k|\varphi_t - sgn(\rho-k)\,(f(\rho)-f(k))\,\varphi_x+\varepsilon\eta''(\rho)\rho_x\varphi-\varepsilon\eta(\rho)_{xx}\varphi\right]\,dt\,dx=0$$

equivale a

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^T\left[|\rho-k|\varphi_t+sgn(\rho-k)\,(f(\rho)-f(k))\,\varphi_x\right]\ dt\ dx\ \geq\ \int_{\mathbb{R}}\int_0^T -\varepsilon\eta(\rho)_{xx}\varphi\ dt\ dx.$$

Finalmente, cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene la desigualdad de Kruzkov (2.11). $\square$

Ya se mostró que la ley de conservación admite una solución de entropía y gracias al siguiente teorema se tiene que la solución de entropía es única.

Teorema 2.1.4. *Sea f lipschitz continua y sean ρ, ν soluciones débiles de los problemas de valores iniciales*

$$\begin{cases} \rho_t + f(\rho)_x = 0 \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu_t + f(\nu)_x = 0 \\ \nu(0,x) = \nu_0(x) \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones de entropía de Kruzkov. Si $\rho_0 - \nu_0 \in L^1$ se tiene

$$||\rho(t,\cdot) - \nu(t,\cdot)||_1 \leq ||\rho_0 - \nu_0||_1$$

La demostración se encuentra en [18].

En particular, el teorema anterior garantiza que si $\rho_0 = \nu_0$ entonces la solución es única.

Observación 2.1.2. *Si $f'' > 0$, f función convexa, considerando $\rho(t,x) = v\left(\frac{x}{t}\right)$ solución del problema de Riemann (2.4), así*

$$-\frac{x}{t^2}v'(z) + \frac{1}{t}f'(v)v'(z) = 0, \quad \text{con } z = \frac{x}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v'(z)}{t}(-z + f'(v)) = 0, \quad \frac{v'(z)}{t} \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad f'(v) = z.$$

Teniendo solución para $v(\frac{x}{t}) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$ siempre que f' sea creciente.

Así, si $\rho_l < \rho_r$ la solución es

$$\rho(t,x) = \begin{cases} \rho_l & x \leq f'(\rho_l)t, \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & f'(\rho_l)t < x < f'(\rho_r)t, \\ \rho_r & x > f'(\rho_r)t, \end{cases}$$

donde $(f')^{-1}$ se denomina envoltura convexa superior.

Observación 2.1.3. *En adelante, en algunas ocasiones se denotará la solución al problema Riemann (2.4) como $\mathcal{R}(\rho_l, \rho_r)(\frac{x}{t})$, es decir,*

$$\rho(t,x) = \mathcal{R}(\rho_l, \rho_r)\left(\frac{x}{t}\right).$$

Ejemplo 4. *Para el problema de Riemann*

$$\begin{cases} \rho_t + f(\rho)_x = 0 \\ \rho(0,x) = \begin{cases} \rho_l & si \quad x < 0, \\ \rho_r & si \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

- *Considerando $\rho_l < \rho_r$, puesto que el segmento que unen $(\rho_l, f(\rho_l))$ con $(\rho_r, f(\rho_r))$ están bajo la gráfica de $f(\rho)$, se presenta un choque entrópico, con velocidad $s = \dfrac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r}$, pudiendo presentarse los siguientes casos*

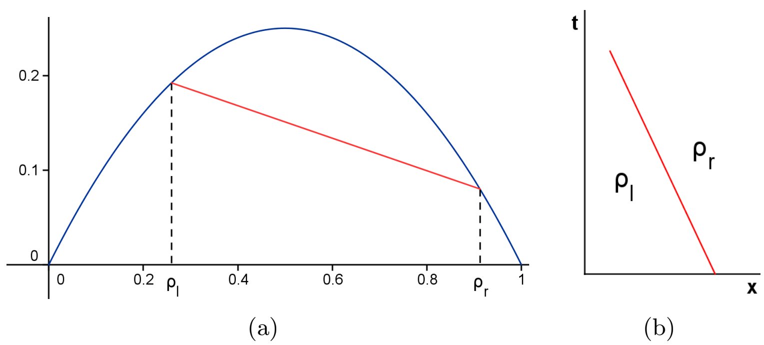


Figura 2.8: Caso velocidad negativa. (a) Representación del flujo en $[0, 1]$ (b) Solución al problema de Riemann

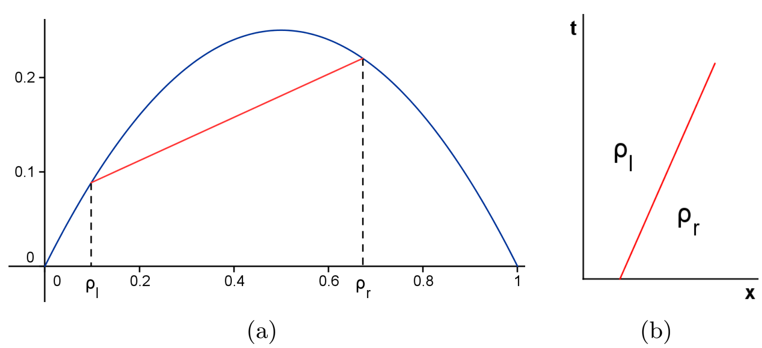


Figura 2.9: Caso velocidad positiva. (a) Representación del flujo en $[0, 1]$ (b) Solución al problema de Riemann

En las Figuras 2.8 y 2.9 se prensenta un choque y la solución en ambos casos es

$$\rho(t,x) = \mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(\tfrac{x}{t}) = \begin{cases} \rho_l & si \quad \frac{x}{t} < s, \\ \rho_r & si \quad \frac{x}{t} > s. \end{cases}$$

- *Considerando $\rho_r < \rho_l$, como el segmento que une $(\rho_r, f(\rho_r))$ con $(\rho_l, f(\rho_l))$ está bajo la gráfica de $f(\rho)$, se debe tomar una envoltura (envoltura cóncava inferior), pues no satisface la condición de entropía de Lax. Dos de los casos que pueden presentarse son los siguientes*

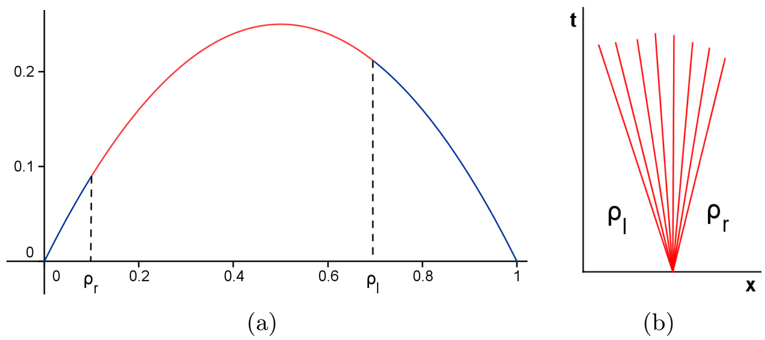


Figura 2.10: Caso f cóncavo. (a) Representación del flujo en $[0,1]$ (b) Solución al problema de Riemann

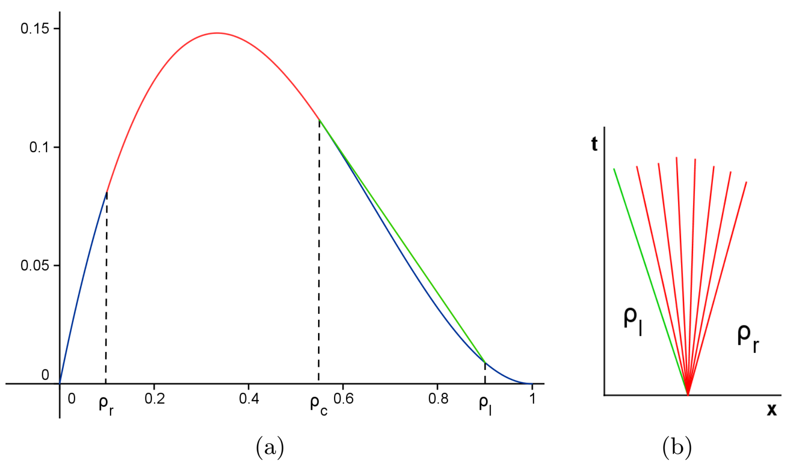


Figura 2.11: Caso f no cóncavo. (a) Representación del flujo en $[0,1]$ (b) Solución al problema de Riemann

En el caso de la Figura 2.10 se presenta una rarefacción, así su solución es

$$\rho(t,x) = \mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(\tfrac{x}{t}) = \begin{cases} \rho_l & si \quad x < (f')(\rho_l)t, \\ (f')^{-1}\left(\dfrac{x}{t}\right) & si \quad (f')(\rho_l)t < x < (f')(\rho_r)t, \\ \rho_r & si \quad x > (f')(\rho_r)t. \end{cases}$$

En el caso de la Figura 2.11 se presenta una rarefacción seguida de un choque entrópico, así su solución es

$$\rho(t,x) = \mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(\tfrac{x}{t}) = \begin{cases} \rho_l & si \quad x < st, \\ \rho_c & si \quad st < x < (f')(\rho_c)t, \\ (f')^{-1}\left(\dfrac{x}{t}\right) & si \quad (f')(\rho_c)t < x < (f')(\rho_r)t, \\ \rho_r & si \quad x > (f')(\rho_r)t, \end{cases}$$

donde $s = \dfrac{f(\rho_l) - f(\rho_c)}{\rho_l - \rho_c}$.

Resumiendo esta sección:

- Las soluciones de la ley de conservación (2.2) pueden presentarse como discontinuidades u ondas de choque, a pesar de la suavidad de los datos iniciales. Por ende, se buscan soluciones débiles. Las velocidades de choque se calculan con la Rankine-Hugoniot (2.1.2).

- Como las soluciones débiles no son necesariamente únicas, condiciones como la de Oleinik son impuestas. De la misma forma soluciones continuas u ondas de rarefacciones son consideradas.

- Soluciones explícitas para el problema de Riemann pueden ser construídas en términos de choques, ondas de rarefacción y choques compuestos.

- La solución de entropía existe y es única. Además, las soluciones de entropía satisfacen la estimación L^1 y son TVD.

2.2. Flujo con coeficiente discontinuo

Un caso particular para leyes de conservación hiperbólicas que se tendrá presente más adelante es cuando el flujo es discontinuo en uno o varios puntos [24, 27]. En particular, en esta sección se considerará el artículo publicado por Seguin y Vovelle [26], en el cual se estudia un flujo con un coeficiente discontinuo con respecto al espacio, es decir, se tiene el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \rho_t + (k(x)f(\rho))_x = 0 \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \\ k(x) = \begin{cases} k_l & x < 0, \\ k_r & x > 0, \end{cases} \end{cases} \tag{2.12}$$

con $k_l, k_r > 0$, $k_l \neq k_r$ y $f(\rho) = \rho(1-\rho)$.

Observación 2.2.1. *Se considerará $\Phi(a,b) = sgn(a-b)\,(f(a) - f(b))$.*

Definición 2.2.1. *Sea $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, con $0 \leq \rho_0 \leq 1$ en casi todo $\mathbb{R}$. Una función $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$ se dice una solución de entropía del problema (2.12) si se satisface la siguiente desigualdad de entropía:*
$\forall \kappa \in [0,1]$ y para toda función test no negativa $\psi \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$

$$\begin{aligned} &\int_o^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(|\rho(t,x) - \kappa|\psi_t(t,x) + k(x)\Phi(\rho(t,x),\kappa)\psi_x(t,x)\right)\, dt\, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - \kappa|\psi(0,x)\, dx + |k_l - k_r| \int_0^{+\infty} f(\kappa)\psi(t,0)\, dt \;\geq\; 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Teorema 2.2.1. *Una solución débil del problema de Cauchy con coeficiente discontinuo (2.12) es también una solución de entropía si se verifica la desigualdad (2.13).*

Demostración. Considerando una sucesión de aproximaciones $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ de la función $k(x)$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ la función k_ε es una función regular, mónotona creciente o decreciente de acuerdo al signo de $k_r - k_l$ y verifica

$$\begin{cases} k_\varepsilon(x) = k_l & x \leq -\varepsilon, \\ k_\varepsilon(x) = k_r & \varepsilon \leq x. \end{cases}$$

Además, para cualquier condición inicial $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ existe una única solución de entropía al problema

$$\begin{cases} \rho_t + (k_\varepsilon(x) f(\rho)) = 0, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), \end{cases} \tag{2.14}$$

que verifica $\forall \kappa \in [0,1]$ y toda función test no negativa $\psi \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\right)$

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (|\rho(t,x) - \kappa| \psi_t(t,x) + k_\varepsilon(x) \Phi(\rho(t,x),\kappa) \psi_x(t,x)) \; dt\, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - \kappa| \psi(0,x)\, dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon'(x) sgn(\rho(t,x) - \kappa) f(\kappa) \psi(t,x)\, dt \;\geq\; 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

En efecto, considerando el problema viscoso

$$\begin{cases} \rho_t^\delta + \left(k_\varepsilon(x) f(\rho^\delta)\right)_x = \delta \rho_{xx}^\delta, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), \end{cases}$$

multiplicando por $\eta'(\rho^\delta)\psi$, donde $\eta(\rho^\delta) = |\rho^\delta - \kappa|$, e integrando con respecto a tiempo y espacio se tiene

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[\rho_t^\delta \eta'(\rho^\delta)\psi + \Big(k_\varepsilon(x) f(\rho^\delta)\Big)_x \eta'(\rho^\delta)\psi - \delta \rho_{xx}^\delta \eta'(\rho^\delta)\psi \right] \; dx \; dt \; = 0.$$

En el cual,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \rho_t^\delta \eta'(\rho^\delta) \psi \, dx\, dt \; &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \eta(\rho^\delta)_t \psi \, dx\, dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x) - \kappa| \psi(0,x)\, dx \; - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} |\rho^\delta - \kappa| \psi_t(t,x)\, dt\, dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\Big(k_\varepsilon(x)f(\rho^\delta)\Big)_x\eta'(\rho^\delta)\psi\,dx\,dt \;=\; &\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\Big[k'_\varepsilon(x)f'(\rho^\delta)\rho^\delta_{xx}\eta'(\rho^\delta)\psi\\
&+\,k_\varepsilon(x)f'(\rho^\delta)\rho^\delta\eta'(\rho^\delta)\psi\Big]\;dx\,dt\,\pm\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}k'_\varepsilon(x)f(\kappa)\eta'(\rho)\psi\,dx\,dt\\
&=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\Big[k'_\varepsilon(x)\Phi(\rho^\delta,\kappa)\psi+\,k_\varepsilon(x)\;\Phi_x(\rho^\delta,\kappa)\psi+sgn(\rho^\delta-\kappa)k'_\varepsilon(x)g(\kappa)\psi\Big]\;dx\,dt\\
&=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\Big[\Big(k_\varepsilon(x)\Phi(\rho^\delta,\kappa)\Big)_x\psi\;+sgn(\rho^\delta-\kappa)k'_\varepsilon(x)g(\kappa)\psi\Big]\;dx\,dt.\end{aligned}$$

Donde

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\Big(k_\varepsilon(x)\Phi(\rho^\delta,\kappa)\Big)_x\psi\,dx\,dt=-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}k_\varepsilon(x)\Phi(\rho^\delta,\kappa)\psi_x\,dx\,dt.$$

Como $\eta(\rho^\delta)_{xx}=\eta''(\rho^\delta)\rho_x+\eta'(\rho^\delta)\rho^\delta_{xx}$ se tiene

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}-\delta\rho^\delta_{xx}\eta'(\rho^\delta)\psi\;dx\;dt\;=\int_0^{T}\int_{\mathbb{R}}\Big[\delta\eta''(\rho^\delta)\rho^\delta\psi-\delta\eta(\rho^\delta)_{xx}\psi\Big]\;dx\;dt.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty}\Big[|\rho^\delta-\kappa|\psi_t(t,x)\,dt\,dx+k_\varepsilon(x)\Phi(\rho^\delta,\kappa)\psi_x\Big]\;dx\,dt+\int_{\mathbb{R}}|\rho_0(x)-\kappa|\psi(0,x)\,dx\\
-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}sgn(\rho^\delta-\kappa)k'_\varepsilon(x)g(\kappa)\psi\,dx\,dt\geq\int_0^{T}\int_{\mathbb{R}}\delta\eta''(\rho^\delta)\rho^\delta\psi\;dx\;dt.\end{aligned}$$

Haciendo $\delta\to 0$ se cumple (2.15). Además, como $|sgn(\rho-\kappa)|\leq 1$ se tiene

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}-\,k'_\varepsilon(x)sgn(\rho-\kappa)f(\kappa)\psi\,dt\;\leq\;\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}|k'_\varepsilon(x)|f(\kappa)\psi\,dx\,dt\;=\;I_\varepsilon.$$

Utilizando la monotonía de k_ε, establecida por el signo de $k_r - k_l$

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= sgn(k_r - k_l) \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} k'_\varepsilon(x) f(\kappa)\psi \, dx \, dt \\
&= sgn(k_r - k_l) \int_0^{+\infty} \left[(k_\varepsilon(x) f(\kappa)\psi) \,|_{\partial\mathbb{R}} - \int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(x) f(\kappa)\psi_x \, dx \right] dt \\
&= -sgn(k_r - k_l) \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(x) f(\kappa)\psi_x \, dx \, dt,
\end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \to 0$ este término converge a

$$\begin{aligned}
&- sgn(k_r - k_l) \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} k(x) f(\kappa)\psi_x \, dx \, dt \\
&= -sgn(k_r - k_l) \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^0 k(x) f(\kappa)\psi_x \, dx + \int_0^{+\infty} k(x) f(\kappa)\psi_x \, dx \right] dt \\
&= -sgn(k_r - k_l) \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^0 k_l f(\kappa)\psi_x \, dx + \int_0^{+\infty} k_r f(\kappa)\psi_x \, dx \right] dt \\
&= -sgn(k_r - k_l) \int_0^{+\infty} \left[k_l f(\kappa)\psi(0,x) \, dx - k_r f(\kappa)\psi(0,x) \, dx \right] dt \\
&= |k_r - k_l| \int_0^{+\infty} f(\kappa)\psi(0,x) \, dt.
\end{aligned}$$

Verificando (2.13). □

Observación 2.2.2. *Esta definición nos permite verificar una solución de entropía cuando se presenta una discontinuidad dependiente del espacio. La cual se pueda generalizar para el caso en que se presenten dos o más discontinuidades.*

Lo presentado en este capítulo corresponde a la teoría básica para resolver leyes de conservación de forma analítica; para profundizar en este tema ver [5, 20]. En el siguiente capítulo se busca dar solución a los problemas mediante métodos de volúmenes finitos.

Capítulo 3

Esquemas Numéricos

En este capítulo se realiza un repaso de la teoría clásica de métodos de volúmenes finitos aplicado a leyes de conservación.

3.1. Discretización del dominio

Se considera una discretización del dominio con respecto al espacio y al tiempo; además, del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \rho_t + f(\rho)_x = 0 & x \in [0, L],\ t > 0, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) & x \in [0, L], \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $f(\rho) = \rho(1-\rho)^n$, $n = 1, 2$.

Definición 3.1.1. *Una malla $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}$ está dada por una sucesión creciente de valores reales $(x_{j+\frac{1}{2}})_{j\in\mathbb{Z}}$, tales que $\mathbb{R} = \cup_{j\in\mathbb{Z}}[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ y $x_{\frac{1}{2}} = 0$, es decir, $\mathcal{T} = \{c_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ donde $c_j = \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}\right]$, con longitud de c_j $\Delta x = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$.*

En cuanto al tiempo, para un tiempo finito $T > 0$ se considera la discretización temporal $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \cdots < t^{n^*} = T$, donde $t^n = t^{n-1} + \Delta t$, $n = 1, ..., n^*$, $\Delta t > 0$.

3.2. Esquema conservativo, consistente y monótono

Al integrar la ley de conservación (3.1) sobre cada c_j resulta

$$\frac{d}{dt}\int_{c_j}\rho(t,x)dx = f(\rho(x_{j-\frac{1}{2}},t)) - f(\rho(x_{j+\frac{1}{2}},t)), \tag{3.2}$$

e integrando con respecto al tiempo la ecuación (3.2) desde $t = t^n$ a $t = t^{n+1}$ se obtiene

$$\int_{c_j}\rho(t^{n+1},x)dx - \int_{c_j}\rho(t^n,x)dx = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\rho(x_{j-\frac{1}{2}},t))dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\rho(x_{j+\frac{1}{2}},t))dt. \tag{3.3}$$

Reorganizando los términos de la ecuación anterior y dividiendo por Δx se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta x}\int_{c_j}\rho(t^{n+1},x)dx = {}& \frac{1}{\Delta x}\int_{c_j}\rho(t^n,x)dx \\ & - \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\rho(x_{j+\frac{1}{2}},t))dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\rho(x_{j-\frac{1}{2}},t))dt\right].\end{aligned} \tag{3.4}$$

La expresión anterior indica que el valor medio de ρ sobre la celda debe estar en un paso de tiempo. Denotando ρ_j^n a la aproximación del valor medio de ρ sobre cada celda c_j en el tiempo t^n

$$\rho_j^n \approx \overline{\rho}_j^n = \frac{1}{\Delta x}\int_{c_j}\rho(t^n,x)dx, \tag{3.5}$$

de manera que las soluciones aproximadas estén dadas por una función constante a trozos

$$\rho^n(x) = \rho_j^n \quad \text{para } x \in c_j, \tag{3.6}$$

haciendo posible reescribir (3.4) como

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \tag{3.7}$$

donde $g_{j-\frac{1}{2}}^n$ y $g_{j+\frac{1}{2}}^n$ son las aproximaciones del promedio del flujo en $x_{j-\frac{1}{2}}$ y $x_{j+\frac{1}{2}}$, respectivamente, con t variando entre t^n y t^{n+1}, es decir,

$$g^n_{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\rho(x_{j+\frac{1}{2}},t))\,dt. \tag{3.8}$$

Definición 3.2.1. *Un método de tres puntos es conservativo si es posible escribirlo de la forma*

$$\rho^{n+1}_j = \rho^n_j - \lambda\left[g(\rho^n_j,\rho^n_{j+1}) - g(\rho^n_{j-1},\rho^n_j)\right], \tag{3.9}$$

para alguna función g llamada función de flujo numérico tal que $g(\rho^n_j,\rho^n_{j+1}) = f^n_{j+\frac{1}{2}}$ y $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Definición 3.2.2. *Se dice que el método (3.9) es consistente con la ley de conservación original si*

$$g(\rho,\rho) = f(\rho), \quad \forall\, \rho \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Observación 3.2.1. *Una de las condiciones para que un esquema converja es que se cumple una determinada condición CFL, para este trabajo se considera la condición CFL*

$$\lambda||f'||_\infty \leq 1 \tag{3.11}$$

Definición 3.2.3. *Sea $\rho^n(x)$, como en (3.6) determinada por un método consistente y conservativo*

- *La variación total de ρ^n con respecto a x, se define como*

$$TV(\rho^n) = \sum_j |\rho^n_{j+1} - \rho^n_j|$$

- *El método se dice de variación total estable (TV-estable) si la variación total de ρ^n es uniformemente acotada, independientemente de Δx y Δt.*

- *El método de dice de variación total decreciente (TVD) si $TV(\rho^{n+1}) \leq TV(\rho^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.*

- *El método se dice monótono si para dos condiciones iniciales* ρ^0 *y* v^0*, se tiene*

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \rho_j^0 \leq v_j^0, \quad \Rightarrow \quad \forall j \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho_j^n \leq v_j^n.$$

Proposición 3.2.1. *El esquema*

$$\rho_j^{n+1} = H(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n) \tag{3.12}$$

es monótono, bajo una condición CFL, si y sólo si H *es una función no decreciente respecto a cada uno de sus argumentos, es decir, si* $\dfrac{\partial H(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n)}{\partial \rho_{j-1}^n} \geq 0$, $\dfrac{\partial H(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n)}{\partial \rho_j^n} \geq 0$ *y* $\dfrac{\partial H(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n)}{\partial \rho_{j+1}^n} \geq 0.$

Teorema 3.2.1 (Teorema de Harten [17])**.** *Sea*

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - C_{j-1}(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) + D_j(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) \tag{3.13}$$

un método numérico conservativo donde C_j, $D_j \in \mathbb{R}$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$*, entonces el esquema es TVD siempre que* $C_{j-1} \geq 0\,, \quad D_j \geq 0\,, \quad C_j + D_j \leq 1\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}.$

Teorema 3.2.2 (Teorema de Lax-Wendroff)**.** *Sea* ρ^n *la aproximación numérica calculada con un método conservativo y consistente. Se supone que* $TV(\rho^n)$ *es uniformemente acotada en* Δt*. Considerando una subsucesión* $\rho_{\Delta t_k}^n$ *tal que* $\Delta t_k \to 0$ *y suponiendo que* $\rho_{\Delta t_k}^n$ *converge en* L_{loc}^1 *cuando* $\Delta t_k \to 0$*. Entonces el límite es una solución débil de* (3.1)*.*

La demostración de este teorema se encuentra en [18], Teorema 3.4.

Este teorema nos garantiza que un esquema consistente y conservativo converge a una solución débil, pero como ya se estudió en el capítulo preliminar pueden existir infinitas soluciones débiles, por lo tanto es necesario encontrar la única solución de entropía del esquema.

Observación 3.2.2. *Recordemos que la desigualdad de entropía puede ser escrita, de manera informal como*

$$\eta(\rho)_t + \psi(\rho)_x \leq 0,$$

donde η es una función convexa escalar de entropía y ψ el flujo entrópico.

Definición 3.2.4. *Una solución débil ρ obtenida del límite de ρ^n satisface la desigualdad de entropía si satisface la desigualdad de entropía discreta de la forma*

$$\eta(\rho_j^{n+1}) \leq \eta(\rho_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\Psi^n_{j+\frac{1}{2}} - \Psi^n_{j-\frac{1}{2}}\right), \tag{3.14}$$

aquí $\Psi^n_{j-\frac{1}{2}} = \Psi(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j)$, donde $\Psi(\rho_l, \rho_r)$ es alguna función de flujo numérico entrópica que debe ser consistente con ψ, de la misma manera se requiere que g sea consistente con f, y $\eta(\rho)$ es una función convexa usualmente $\eta(\rho) = |\rho - \kappa|$.

Otro teorema que garantiza convergencia a la solución débil es el siguiente.

Teorema 3.2.3. *Sea $\rho_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de variación acotada. Se asume que ρ^n es calculada con un método conservativo, consistente, TV-estable y uniformemente acotado. Sea $T > 0$, entonces $\rho^n(t)$ tiene una subsucesión que converge para todo $t \in [0, T]$ a una solución débil $\rho(t)$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Más aún, el límite está en $C([0,T], L^1_{loc}(\mathbb{R}))$.*

La demostración de este teorema se encuentra en [18], Teorema 3.8.

Teorema 3.2.4. *Bajo las suposiciones del teorema anterior, las soluciones aproximadas calculadas por un método conservativo, consistente y monótono convergen a la solución de entropía cuando $\Delta t \to 0$.*

La demostración de este teorema se encuentra en [18], Teorema 3.9.

3.3. Flujos numéricos

Existen diversos flujos numéricos conservativos, cuatro de los cuales se detallan a continuación.

- Flujo de Godunov corresponde a

$$g^n_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \text{mín}_{\rho_j \leq \rho \leq \rho_{j+1}} (f(\rho)) & \text{si } \rho_j \leq \rho_{j+1} \\ \\ \text{máx}_{\rho_{j+1} \leq \rho \leq \rho_j} (f(\rho)) & \text{si } \rho_{j+1} \leq \rho_j. \end{cases} \tag{3.15}$$

- Flujo de Lax-Friedrichs corresponde a

$$g^n_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f(\rho^n_j) + f(\rho^n_{j+1}) - \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\rho^n_{j+1} - \rho^n_j\right)\right]. \tag{3.16}$$

- Flujo Rusanov o Local Lax-Friedrichs corresponde a

$$g^n_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f(\rho^n_j) + f(\rho_{j+1}) - \text{máx}\left(|f'(\rho^n_j)|, |f'(\rho^n_{j+1})|\right)\left(\rho^n_{j+1} - \rho^n_j\right)\right]. \tag{3.17}$$

- Flujo de Engquist-Osher corresponde a

$$g^n_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f(\rho^n_j) + f(\rho_{j+1}) - \int_{\rho^n_j}^{\rho^n_{j+1}} |f'(\theta)|\, d\theta \right]. \tag{3.18}$$

3.4. Esquemas de alto orden

Si bien los esquemas propuestos anteriormente aproximan con presición la solución de los problema, existen otras formas de aproximar con una mayor precisión, la cual se realiza haciendo una reconstrucción.

La reconstrucción se realiza mediante una función lineal por tramos

$$q_j(x) = \rho^n_j + \sigma_j(x - x_j), \quad x \in c_j, \tag{3.19}$$

donde σ_j es una aproximación a la derivada de ρ y es aproximada mediante un limitador de pendiente

$$\sigma_j = \phi(\theta_j)\frac{(\rho^n_{j+1} - \rho^n_j)}{\Delta x},$$

y $\phi(\theta)$ se denomina flux limiter pudiendo definirse de diferentes formas tales como,

$$\begin{aligned}
\text{minmod:} \quad & \phi(\theta) = && \text{máx}(0, \text{mín}(1,\theta)) \\
\text{superbee:} \quad & \phi(\theta) = && \text{máx}(0, \text{mín}(1,2\theta), \text{mín}(2,\theta)) \\
\text{van Leer:} \quad & \phi(\theta) = && \frac{\theta + |\theta|}{1+|\theta|},
\end{aligned}$$

y $\theta_j = \dfrac{\rho_j^n - \rho_{j-1}^n}{\rho_{j+1}^n - \rho_j^n}$ es un indicador de suavidad.

Se denotan las reconstrucciones a izquierda y a derecha en $x_{j+\frac{1}{2}}$ como

$$\rho^L_{j+\frac{1}{2}} = q_j(x_{j+\frac{1}{2}}) = \rho_j^n + \frac{\Delta x}{2}\sigma_j \qquad \rho^R_{j+\frac{1}{2}} = q_{j+1}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \rho_{j+1}^n - \frac{\Delta x}{2}\sigma_{j+1}. \tag{3.20}$$

Consideremos un método conservativo de la forma

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n + \Delta t \mathcal{L}(\rho^n) := \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\widehat{g}^n_{j+\frac{1}{2}} - \widehat{g}^n_{j-\frac{1}{2}}\right), \tag{3.21}$$

donde

$$\widehat{g}^n_{j+\frac{1}{2}} = g^n_{j+\frac{1}{2}}\left(\rho^L_{j+\frac{1}{2}}, \rho^R_{j+\frac{1}{2}}\right), \tag{3.22}$$

con $g^n_{j+\frac{1}{2}}$ cualquier flujo numérico de la sección anterior.

Para garantizar que el método a utilizar sea de segundo orden es que se emplea un método Runge-Kutta de segundo orden, el cual es de la forma

$$\begin{aligned}
\rho_j^{(1)} &= \rho_j^n + \Delta t \mathcal{L}(\rho^n) \\
\rho_j^{(2)} &= \rho_j^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(\rho^{(1)}) \\
\rho_j^{n+1} &= \frac{\rho_j^n + \rho_j^{(2)}}{2}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

El algorítmo a utilizar es el siguiente:

- Dado ρ_j^n, se reconstruyen los promedios para obtener la función lineal a trozos (3.19). Cualquier limitador de pendiente expuesto puede ser usado.

- Dados los valores de borde de ρ_j^n en cada celda, conectamos estos valores con el flujo numérico (4.22) puede usarse el Godunov, Engquist-Osher o local Lax-Friedrichs.

- Para los esquemas de segundo orden, utilizamos el método Runge-Kutta de segundo orden. Dado que este método consiste en dos etapas, las etapas 1 y 2 deben aplicarse a cada etapa.

Debido a que los esquemas aproximan la solución débil del problema, consideraremos las siguiente normas para calcular el error de aproximación.

Definición 3.4.1. *Se considerará como error-L^1 y error-L^2, respectivamente, a*

$$||\rho^n(x) - \rho^{exacta}(t,x)||_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\rho_j^n - \rho^{exacta}(t,x_j)|\Delta x, \tag{3.24}$$

$$||\rho^n(x) - \rho^{exacta}(t,x)||_2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\rho_j^n - \rho^{exacta}(t,x_j)|^2\Delta x. \tag{3.25}$$

3.5. Ejemplos numéricos

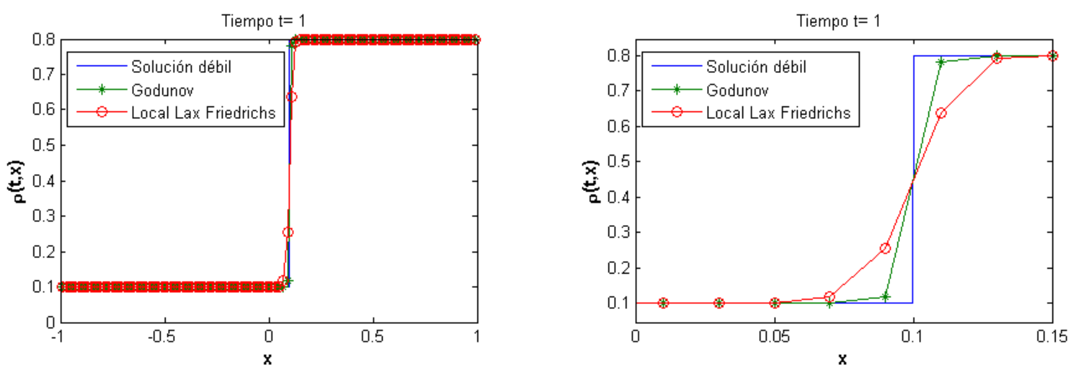
En esta sección se resuelven numéricamente los ejemplos resueltos analíticamente en la sección 2.1, además se proponen y resuelven problemas adicionales.

Ejemplo 5. *En el ejemplo 2, parte 2.1 se tiene*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 & \rho \in [0,1], x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & x \in \mathbb{R}, \\ \rho_0(x) = \begin{cases} 0.1 & si\ x < 0, \\ 0.8 & si\ x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Su solución es

$$\rho(t,x) = \begin{cases} 0.1 & si\ x < 0.1t, \\ 0.8 & si\ x > 0.1t. \end{cases}$$



(a) (b)

Figura 3.1: (a) Comparación entre solución débil, flujo Local Lax Friedrichs y flujo Godunov. (b) Zoom al choque.

En las Figuras 3.1(a) y 3.1(b) se observa que el flujo de Godunov aproxima mejor a la solución que el flujo de Local Lax Fridrichs en el choque, lo que se muestra en la siguiente tabla donde se compara el error producido con cada flujo, observándose que el error producido con el flujo de Godunov es menor al que se produce con el flujo Local Lax Friedrichs.

Número de celdas	*Local Lax Friedrichs*		*Godunov*	
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^1*-error*	*Convergencia* L^1
100	$6.91E-03$	-	$1.03E-03$	-
200	$3.46E-03$	$9.98E-01$	$5.15E-04$	$1.00E00$
400	$1.73E-03$	$1.00E+00$	$2.57E-04$	$1.00E+00$
800	$8.64E-04$	$1.00E+00$	$1.29E-04$	$9.90E-01$
1600	$4.32E-04$	$1.00E+00$	$6.44E-05$	$1.00E+00$
3200	$2.16E-04$	$1.00E+00$	$3.22E-05$	$1.00E+00$

Ejemplo 6. *En el ejemplo 2, parte 2.2 se tiene*

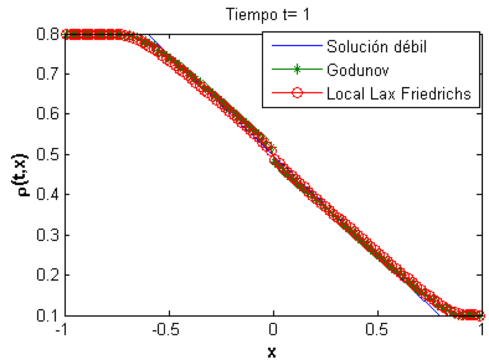
$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 & \rho \in [0,1], x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & x \in \mathbb{R}, \\ \rho_0(x) = \begin{cases} 0.8 & si\ x < 0, \\ 0.1 & si\ x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Su solución es

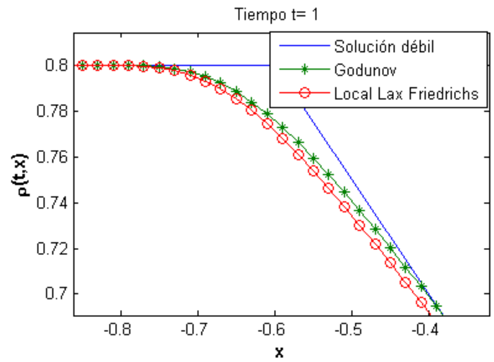
$$\rho(t,x) = \begin{cases} 0.8 & si\ x < -0.6t, \\ \dfrac{t-x}{2t} & si\ -0.6t < x < 0.8t, \\ 0.1 & si\ x > 0.8t. \end{cases}$$

En las Figuras 3.2(a), 3.2(b) y 3.2(c) se observa una similitud en las aproximaciones de los flujo Godunov y Local Lax Friedrichs, sin embargo, al inicio y término de la refacción se muestra que el flujo Godunov aproxima mejor, Figuras 3.2(b) y 3.2(d), en cambio en la Figura 3.2(c) se aprecia que el flujo Local Lax Fridrich aproxima mejor la solución.

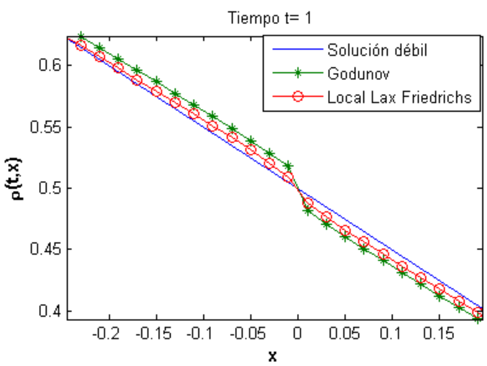
En la siguiente tabla se compara el error producido con cada flujo, observándose que el error producido con el flujo Local Lax Friedrichs es levemente menor al que se produce con el flujo de Godunov.



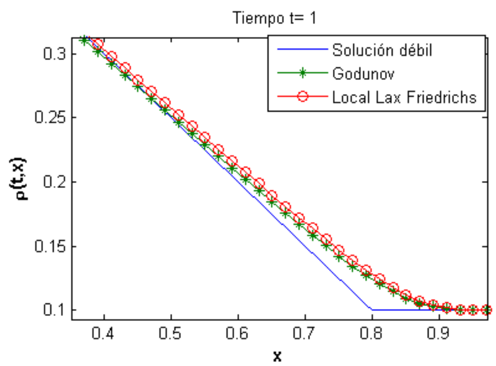
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.2: (a) Comparación entre solución débil, flujo Local Lax Friedrichs y flujo Godunov. (b) Zoom a la rarefacción. (c) Zoom a la rarefacción. (d) Zoom a la rarefacción.

Número de celdas	*Local Lax Friedrichs*		*Godunov*	
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^1*-error*	*Convergencia* L^1
100	$1.87E-02$	-	$1.95E-02$	-
200	$1.11E-02$	$7.52E-01$	$1.18E-02$	$7.25E-01$
400	$6.49E-03$	$7.74E-01$	$6.95E-03$	$7.64E-01$
800	$3.74E-03$	$7.95E-01$	$4.02E-03$	$7.90E-01$
1600	$2.13E-03$	$8.12E-01$	$2.29E-03$	$8.12E-01$
3200	$1.20E-03$	$8.28E-01$	$1.29E-03$	$8.28E-01$

Ejemplo 7. *Otro problema es considerar un flujo con un punto de inflexión*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho)^2)_x = 0 & \rho \in [0,1], x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & x \in \mathbb{R}, \\ \rho_0(x) = \begin{cases} 0.9 & si\ x < 0, \\ 0.1 & si\ x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

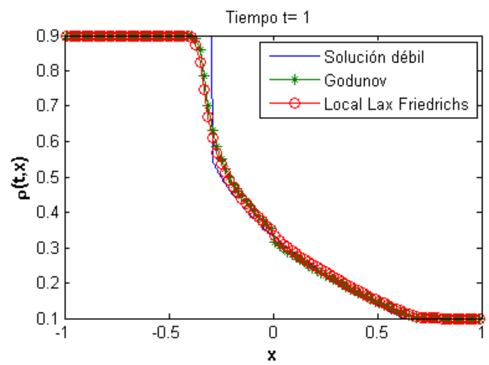
Su solución es

$$\rho(t,x) = \begin{cases} 0.9 & si\ x < -0.2925t, \\ 0.55 & si\ -0.2925t < x < -0.2925t, \\ \dfrac{2}{3} - \sqrt{\dfrac{t+3x}{9t}} & si\ -0.295t < x < 0.8t, \\ 0.1 & si\ x > 0.63t. \end{cases}$$

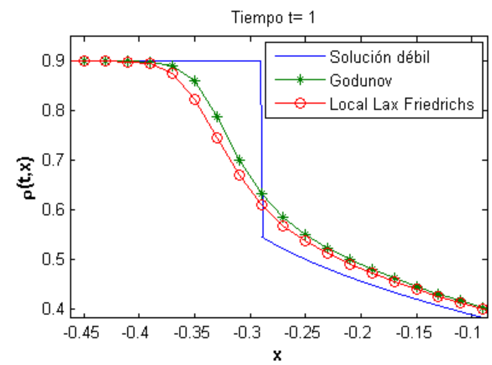
En las Figuras 3.3(a), 3.3(b) y 3.3(c) se observa una similitud en las aproximaciones de los flujo Godunov y Local Lax Friedrichs, sin embargo, se observa que en el choque el flujo de Godunov aproxima mejor a la solución que el de Local Lax Friedrichs y caso contrario ocurre en la rarefacción, como ya se mencionó en los ejemplos anteriores.

Sin embargo, basándos en la siguiente tabla se decide trabajar los demás ejemplos con flujo de Godunov, ya que aproxima mejor la solución del problema.

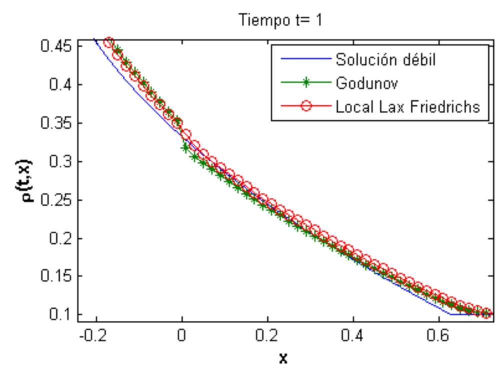
Número de celdas	*Local Lax Friedrichs*		*Godunov*	
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^1*-error*	*Convergencia* L^1
200	$1.55E-02$	$8.11E-01$	$1.48E-02$	$7.62E-01$
400	$9.75E-03$	$6.69E-01$	$9.43E-03$	$6.50E-01$
800	$5.53E-03$	$8.18E-01$	$5.41E-03$	$8.02E-01$
1600	$3.28E-03$	$7.54E-01$	$3.22E-03$	$7.49E-01$
3200	$1.92E-03$	$7.73E-01$	$1.89E-03$	$7.69E-01$



(a)



(b)



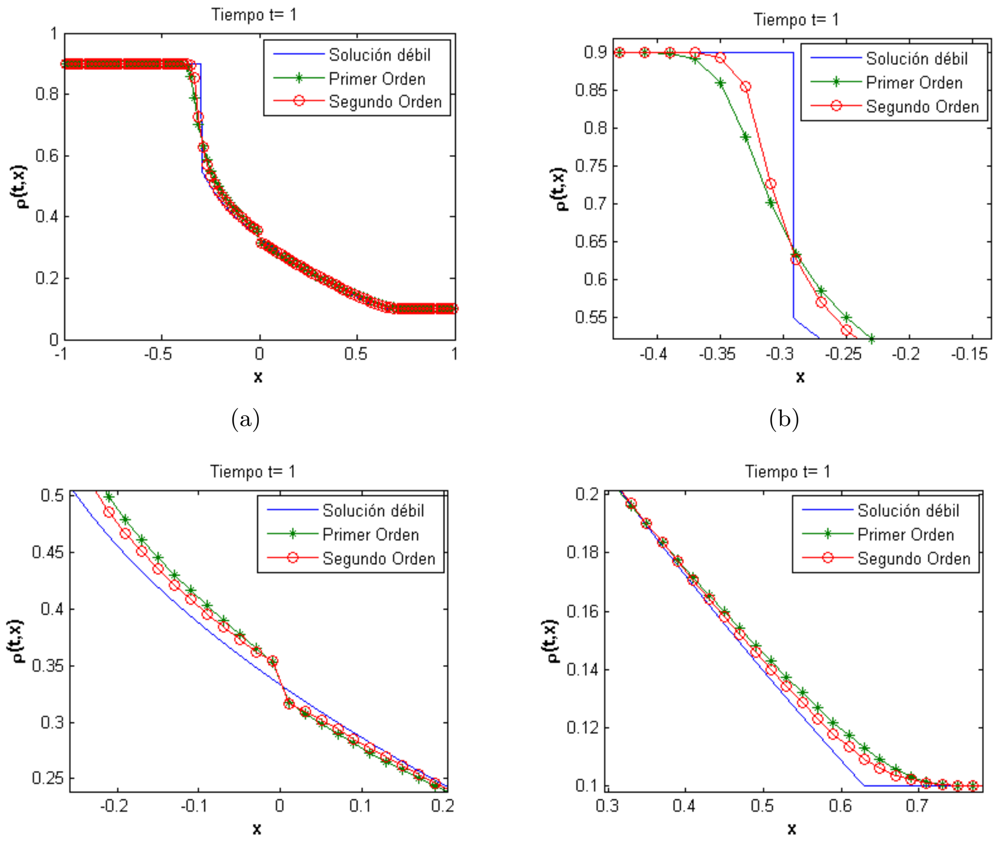
(c)

Figura 3.3: (a) Comparación entre solución débil, flujo Local Lax Friedrichs y flujo Godunov. (b) Zoom al choque. (c) Zoom a la rarefacción.

Ahora, se compara el mismo ejemplo con esquemas de primer y segundo orden, considerando como flujo Godunov y para el de segundo orden como flux limiter minmod.

En las Figuras 3.4(a), 3.4(b), 3.4(c) y 3.4(d) se logra observar que, tal como se esperaba, el esquema de segundo orden aproxima mejor la solución del problema.

La siguiente tabla muestra el error producido con cada esquema, donde se aprecia que el esquema de segundo orden produce un error menor en comparación al de primer orden.



(a) (b) (c) (d)

Figura 3.4: (a) Comparación entre solución débil y esquemas de primer y segundo orden. (b) Zoom al choque. (c) Zoom a la rarefacción. (d) Zoom a la rarefacción.

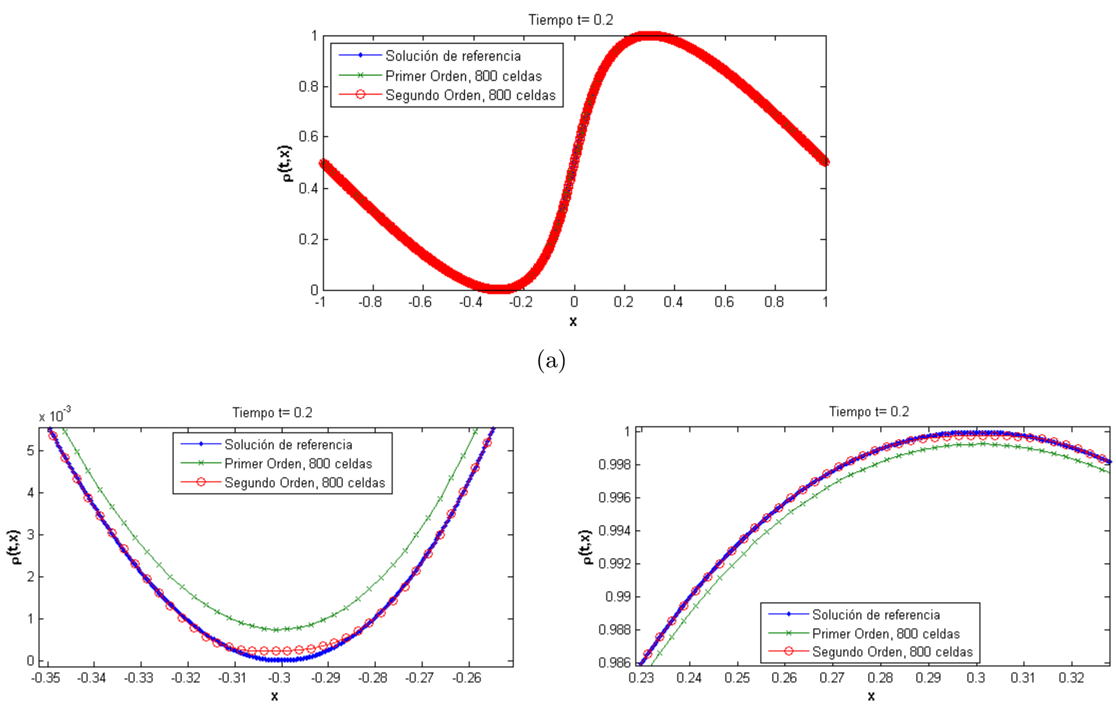
Número de celdas	*Primer Orden*		*Segundo Orden*	
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^1*-error*	*Convergencia* L^1
100	$2.51E-02$	-	$1.83E-02$	-
200	$1.48E-02$	$7.62E-01$	$9.34E-03$	$9.70E-01$
400	$9.43E-03$	$6.50E-01$	$5.50E-03$	$7.64E-01$
800	$5.41E-03$	$8.02E-01$	$2.75E-03$	$1.00E+00$
1600	$3.22E-03$	$7.49E-01$	$1.50E-03$	$8.74E-01$
3200	$1.89E-03$	$7.69E-01$	$8.04E-04$	$9.00E-01$

Ejemplo 8. *Para analizar la convergencia de los métodos de primer orden y de segundo orden, se estudia el siguiente problema con dato inicial suave y periódico*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 & \rho \in [0,1], x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & x \in [-1,1], \\ \rho_0(x) = \dfrac{1 + sen(\pi x)}{2}. \end{cases}$$

Se tomará como solución de referencia el esquema de segundo orden con 6400 *celdas, en un tiempo de* $T = 0.2$.

En las Figuras 3.5(a), 3.5(b) y 3.5(c) se logra observar que, tal como se esperaba, el esquema de segundo orden aproxima mejor la solución del problema.



(a)

(b)

(c)

Figura 3.5: (a) Comparación entre solución de referencia y esquemas de primer y segundo orden. (b) Zoom. (c) Zoom.

En las siguientes tablas se muestra el error producido por los esquemas de primer orden *y de segundo orden, comparando los errores L^1 y L^2, y la razón de convergencia que se produce con cada uno. Observándose que el esquema de segundo orden con error L^1 produce un menor error y genera una mayor razón de convergencia en comparación a los demás.*

Número de celdas	*Primer Orden*			
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^2*-error*	*Convergencia* L^2
50	$8.74E-03$	$-$	$1.17E-02$	$-$
100	$4.64E-03$	$9.14E-01$	$6.74E-03$	$8.00E-01$
200	$2.42E-03$	$9.42E-01$	$3.67E-03$	$8.78E-01$
400	$1.24E-03$	$9.67E-01$	$1.92E-03$	$9.33E-01$
800	$6.26E-04$	$9.82E-01$	$9.36E-04$	$9.65E-01$

Número de celdas	*Segundo Orden*			
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^2*-error*	*Convergencia* L^2
50	$2.70E-03$	$-$	$3.98E-03$	$-$
100	$8.10E-04$	$1.73E+00$	$1.46E-03$	$1.45E+00$
200	$2.21E-04$	$1.87E+00$	$5.09E-04$	$1.52E+00$
400	$5.77E-05$	$1.94E+00$	$1.74E-04$	$1.55E+00$
800	$1.48E-05$	$1.96E+00$	$5.94E-05$	$1.55E+00$

En los ejemplos se logra apreciar la diferencia al aproximar un problema usando un esquema de primer orden y uno de segundo orden. Es por ello que en los siguientes capítulos se busca aproximar la solución de ciertos tipos de problemas utilizando esquemas de segundo orden.

En este capítulo se expuso la teoría básica para resolver leyes de conservación usando métodos de volúmenes finitos; para profundizar ver [4, 18, 22]. Los siguientes capítulos tratan leyes de conservación con flujo restringido, los cuales permiten modelar fenómenos del tráfico vehicular.

Capítulo 4

Ley de conservación con restricción de flujo constante en espacio

En este capítulo se estudia de una ley de conservación con flujo restringido fijo resolviendo problemas de forma analítica y numérica, simulando la presencia de semáforos en la vía; y luego en el próximo capítulo se estudia una ley de conservación con una restricción móvil.

4.1. Modelo

Chalons, Goatin y Seguin [9], plantean el estudio de un problema de Cauchy para leyes de conservación escalares con una restricción unilateral de la forma

$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{4.1a}$$

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{4.1b}$$

$$f(\rho(t, 0)) \leq F(t), \qquad t > 0. \tag{4.1c}$$

Como se planteó en la Sección 2.1 se considerará la función flujo como $f(\rho) = \rho(1 - \rho)$ y $f(\rho) = \rho(1 - \rho)^2$.

Como la restricción es constante, se tiene que $F(t) = F \in [0, f_{\text{máx}}]$, y para cada flujo $f_{\text{máx}} = \underset{\rho\in[0,1]}{\text{máx}} f(\rho)$, y $\rho_1^F, \rho_2^F \in [0,1]$, son soluciones de la ecuación $f(\rho) = F$.

Teniendo en cuenta el problema de Riemann (2.4), se denota

$$\hat{\rho} = \begin{cases} \text{mín}\left\{\rho_1^F, \rho_2^F\right\} & \text{si} \quad f(\rho_l) > F \text{ y } \rho_1^F, \rho_2^F \geq \rho_l \\ \text{máx}\left\{\rho_1^F, \rho_2^F\right\} & \text{si} \quad f(\rho_l) \leq F \text{ y } \rho_1^F, \rho_2^F \leq \rho_l, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\check{\rho} = \begin{cases} \text{máx}\left\{\rho_1^F, \rho_2^F\right\} & \text{si} \quad f(\rho_r) > F \text{ y } \rho_1^F, \rho_2^F \leq \rho_r \\ \text{mín}\left\{\rho_1^F, \rho_2^F\right\} & \text{si} \quad f(\rho_r) \leq F \text{ y } \rho_1^F, \rho_2^F \geq \rho_r, \end{cases} \tag{4.3}$$

cuando $\rho_l > \rho_1^F$, respectivamente $\rho_r < \rho_2^F$.

Observación 4.1.1. *En particular, se observa que si $f'(\rho)$ está definida, $f'(\hat{\rho}) \leq 0$ y $f'(\check{\rho}) \geq 0$, lo que indica que las ondas pegan a la izquierda y las ondas pegan a la derecha, respectivamente. Por lo cual, un salto de $\hat{\rho}$ a $\check{\rho}$ no satisface la condición de entropía de Lax, es decir, no satisface $f'(\hat{\rho}) > s > f'(\check{\rho})$, pero satisface la condición de entropía de Liu* (2.9)*, este tipo de onda de choque se conoce como choque no clásico, ver [9].*

Observación 4.1.2. *Basándose en la Observación 2.1.3, el resolvedor l problema de Riemann restringido* (4.1) *se denotará como $\mathcal{R}^F(\rho_l, \rho_r)$, es decir,*

$$\rho(t, x) = \mathcal{R}^F(\rho_l, \rho_r)(\frac{x}{t}),$$

definido a continuación.

Definición 4.1.1. *El problema de Riemann restringido $\mathcal{R}^F : (\rho_l, \rho_r) \mapsto \mathcal{R}^F(\rho_l, \rho_r)$ para* (4.1) *está definido como sigue:*

- $\mathcal{R}^F(\rho_l, \rho_r)(\frac{x}{t}) = \mathcal{R}(\rho_l, \rho_r)(\frac{x}{t}), \quad$ *si* $f\left(\mathcal{R}^F(\rho_l, \rho_r)(0)\right) \leq F$.
- $\mathcal{R}^F(\rho_l, \rho_r)(\frac{x}{t}) = \begin{cases} \mathcal{R}(\rho_l, \hat{\rho})(\frac{x}{t}), & si\ \frac{x}{t} < 0 \\ \mathcal{R}(\check{\rho}, \rho_r)(\frac{x}{t}), & si\ \frac{x}{t} > 0 \end{cases}$ *en otro caso.*

donde $\mathcal{R}(\cdot,\cdot)(\frac{x}{t})$ como en Observación 2.1.3.

Ejemplo 9. *Considerando el problema de Riemann*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.4 & x < 0, \\ 0.5 & x > 0, \end{cases} \\ f(\rho(t,0)) \leq F(t) = 0.2 \;, \forall t. \end{cases}$$

En la Figura 4.1 se bosqueja la situación, donde $\hat{\rho}$ y $\check{\rho}$ son solución de $f(\rho) = 0.2$, es decir, $\check{\rho} = \dfrac{1-\sqrt{0.2}}{2}$ y $\hat{\rho} = \dfrac{1+\sqrt{0.2}}{2}$.

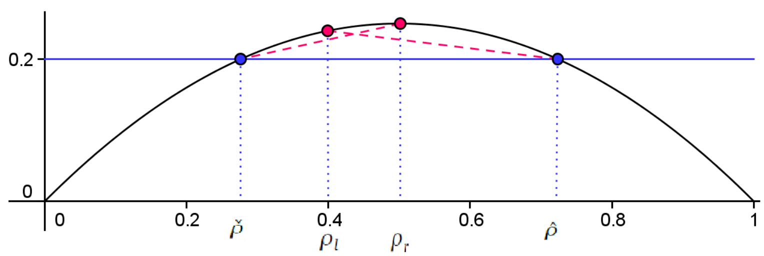


Figura 4.1: Representación del flujo restringido en $[0,1]$.

De acuerdo a la Definición 4.1.1, se da lugar a tres nuevos problemas:

- $\mathcal{R}(0.4, \hat{\rho})(\frac{x}{t})$, *basándose en el problema del Ejemplo 4 se da origen a un choque entrópico con velocidad $s_1 = 1 - 0.4 - \hat{\rho} = 0.6 - \hat{\rho}$,*
- $\mathcal{R}(\hat{\rho}, \check{\rho})(\frac{x}{t})$, *basándose en el problema del Ejemplo 4 y en la Observación 4.1.1 se da origen a un choque no clásico con velocidad $s_2 = 0$,*
- $\mathcal{R}(\check{\rho}, 0.5)(\frac{x}{t})$, *basándose en el problema del Ejemplo 4 se da origen a un choque entrópico con velocidad $s_3 = 1 - \check{\rho} - 0.5 = 0.5 - \check{\rho}$.*

Así, la solución del problema es

$$\rho(t,x) = \mathcal{R}^F(0.4, 0.5)(\tfrac{x}{t}) = \begin{cases} 0.4 & x < s_1 t, \\ \hat{\rho} & s_1 t < x < 0, \\ \check{\rho} & 0 < x < s_2 t, \\ 0.5 & x > s_3 t. \end{cases}$$

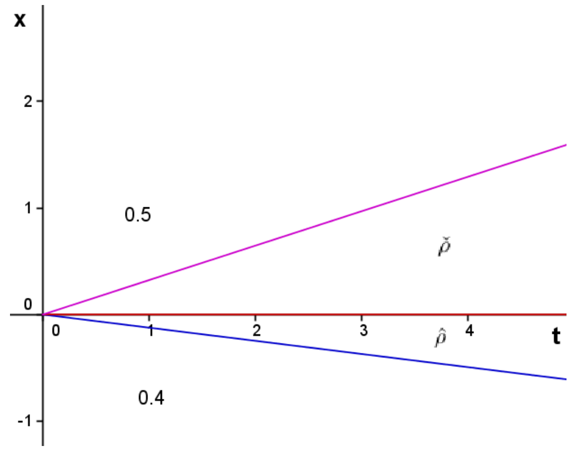


Figura 4.2: Solución del problema.

Ejemplo 10. *Considerando el problema de Riemann*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.8 & x < 0, \\ 0.1 & x > 0, \end{cases} \\ f(\rho(t,0)) \leq F(t) = 0.2 \ , \forall t. \end{cases}$$

En la Figura 4.3 se bosqueja la situación, con $\check{\rho}$ y $\hat{\rho}$ como en el ejemplo anterior.

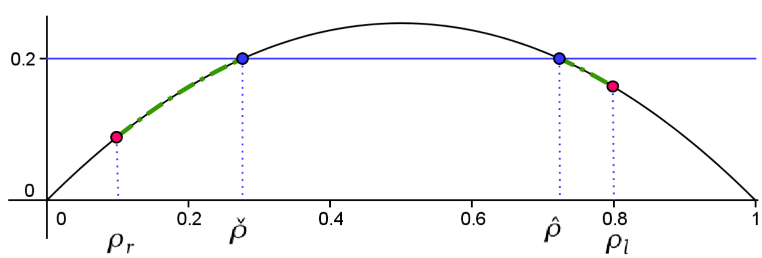


Figura 4.3: Representación del flujo restringido en $[0,1]$.

De acuerdo a la Definición 4.1.1, se da lugar a tres nuevos problemas:

- $\mathcal{R}(0.8,\hat{\rho})(\frac{x}{t})$, *basándose en el problema del Ejemplo 4 se da origen a una rarefacción,*
- $\mathcal{R}(\hat{\rho},\check{\rho})(\frac{x}{t})$, *basándose en el problema del Ejemplo 4 y en la Observación 4.1.1 se da origen a un choque no clásico con velocidad $s = 0$,*

- $\mathcal{R}(\check{\rho}, 0.1)(\frac{x}{t})$, *basándose en el problema del Ejemplo 4 se da origen a una rarefacción.*

Así, la solución del problema es

$$\rho(t,x) = \mathcal{R}^F(0.8, 0.1)(\tfrac{x}{t}) = \begin{cases} 0.8 & x < -0.6t, \\ \dfrac{t-x}{2t} & -0.6t < x < (1-2\hat{\rho})t, \\ \hat{\rho} & (1-2\hat{\rho})t < x < 0, \\ \check{\rho} & 0 < x < (1-2\check{\rho})t, \\ \dfrac{t-x}{2t} & (1-2\check{\rho}) < x < 0.8t, \\ 0.1 & x > 0.8t. \end{cases}$$

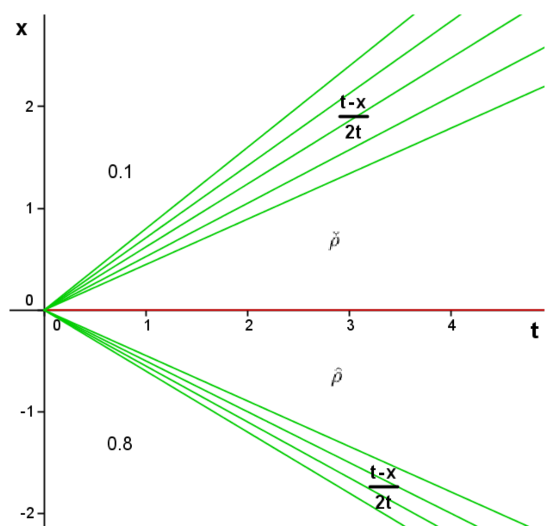


Figura 4.4: Solución del problema.

Ahora, para profundizar más el estudio de una ley de conservación con flujo restringido por una constante que depende del tiempo, es que se analizará lo propuesto en [1].

Siguiendo, inicialmente, a Colombo y Goatin [11] se plantea la siguiente definición de solución de entropía, considerando $\Pi = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ y $\overline{\rho} \in (0,1)$, satisfaciendo que $f(\overline{\rho}) = f_{\text{máx}}$.

Definición 4.1.2. *Sea* $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ *y* $F \in L^\infty(\mathbb{R}^+, [0, f(\overline{\rho})])$*. Una función* $\rho \in L^\infty(\Pi, [0,1])$ *se dice que es una solución de entropía-CG de* (4.1) *si*

i) para toda función test no negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Pi)$ *y todo* $\kappa \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \left(|\rho(t,x)-\kappa|\partial_t + \Phi(\rho(t,x),\kappa)\,\partial_x \right) \varphi(t,x)\; dx\; dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x)-\kappa|\,\varphi(0,x)\; dx + 2\int_0^{+\infty} \left(1 - F(t)/f(\overline{\rho})\right)\, f(\kappa)\,\varphi(t,0)\; dt \geq 0\end{aligned} \tag{4.4}$$

ii) la restricción (4.1c) *en las trazas de* $f(\rho(t,\cdot))$ *en* $\{x=0\}$ *satisface*

$$f(\rho(t,0^-)) = f(\rho(t,0^+)) \leq F(t) \text{ para casi todo } t > 0, \tag{4.5}$$

donde $\rho(t,0^\pm)$ *denota los operadores de las trazas fuertes de los lados izquierdo y derecho en* $\{x=0\}$.

La desigualdad de entropía (4.4) se puede obtener al considerar el problema discontinuo

$$\begin{cases} \rho_t + (k_\varepsilon(x) f(\rho)) = 0 \\ \qquad \rho(0,x) = \rho_0(x), \end{cases} \tag{4.6}$$

donde

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \geq \varepsilon \\ \dfrac{F(t)}{f(\overline{\rho})}, & |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

en el cual se presentan discontinuidades en ε y $-\varepsilon$.

Considerando la Definición 2.2.1, pero aplicada a dos discontinuidades.

$$\begin{aligned}\int_o^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \left(|\rho(t,x)-\kappa|\,\psi_t(t,x) + k_\varepsilon(x)\Phi(\rho(t,x),\kappa)\psi_x(t,x)\right) dt\, dx + \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x)-\kappa|\,\psi(0,x)\, dx \\ + \left|1 - \frac{F(t)}{f(\overline{\rho})}\right| \int_0^{+\infty} f(\kappa)\psi(t,-\varepsilon)\, dt + \left|\frac{F(t)}{f(\overline{\rho})} - 1\right| \int_0^{+\infty} f(\kappa)\psi(t,\varepsilon)\, dt \;\geq\; 0\end{aligned}$$

como $k_\varepsilon(x) \leq 1$ y haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene (4.4).

Para garantizar que la solución de entropía-CG sea de variación acotada se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1. *Supongamos que* $\rho_0 \in BV(\mathbb{R}, [0,1])$ *y que* $F \in BV(\mathbb{R}^+, [0, f(\overline{\rho}])$. *Entonces existe una y sólo una solución de entropía-CG* $\rho \in BV(\Pi)$ *al problema* (4.1). *Más aún, dadas dos condiciones iniciales* $\rho_0, v_0 \in BV(\mathbb{R}, [0,1])$ *tales que* $(\rho_0 - v_0) \in L^1(\mathbb{R})$, *las correspondientes soluciones de entropía-CG* ρ, v *satisfacen la siguiente propiedad* L^1*-estabilidad*

$$\int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x) - v(t,x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x) - v_0(x)|\, dx.$$

La demostración se encuentra en [11], Proposición 4.4.

Definición 4.1.3. *Sea* $F \in [0, f(\overline{\rho})]$. *El germen de admisibilidad* $\mathcal{G}(F)$ *para la ley de conservación asociada a la restricción* $f(\rho)|_{\{x=0\}} \leq F$ *es el conjunto de* $[0,1]^2$ *definido como* $\mathcal{G}(F) = \mathcal{G}_1(F) \cup \mathcal{G}_2(F) \cup \mathcal{G}_3(F)$, *donde*

- $\mathcal{G}_1(F) = \{(c_l, c_r) \in [0,1]^2; c_l > c_r, f(c_l) = f(c_r) = F\}$,
- $\mathcal{G}_2(F) = \{(c, c) \in [0,1]^2; f(c) \leq F\}$,
- $\mathcal{G}_3(F) = \{(c_l, c_r) \in [0,1]^2; c_l < c_r, f(c_l) = f(c_r) \leq F\}$.

Además, en [1] también se define la función

$$c(x) = \begin{cases} c_l\ , & x < 0 \\ c_r\ , & x > 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

donde $(c_l, c_r) \in [0,1]^2$, con $(c_l, c_r) \in \mathcal{G}(F)$.

Una definición alternativa de solución de entropía propuesta por Andreianov et. al. [1] está dada por las siguientes equivalencias.

Proposición 4.1.1. *Sea* $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ *y* $F \in L^\infty(\mathbb{R}^+, [0, f(\overline{\rho})]$. *Sea* $\rho \in L^\infty(\Pi, [0,1])$. *Entonces las afirmaciones* ***(A)***, ***(B)*** *y* ***(C)*** *son equivalentes*

(A) *(A1)* *ρ es una solución de entropia Kruzkov para $x < 0$ y $x > 0$, es decir, para toda función test no negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Pi \setminus x = 0)$ y todo $\kappa \in [0,1]$*

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\,|\rho(t,x) - \kappa|\partial_t + \Phi(\rho(t,x),\kappa)\,\partial_x)\ \varphi(t,x)\ dx\ dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x) - \kappa|\,\varphi(0,x)\ dx \geq 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

(A2) *en adición, para casi todo $t > 0$*

$$\big(\rho(t,0^-), (\rho(t,0^+)\big) \in \mathcal{G}(F(t)). \tag{4.9}$$

(B) *(B1)* *la afirmación (A1) se mantiene, es decir, ρ es una solución de entropía Kruzkov para $x < 0$ y $x > 0$, en el sentido de (4.8), con $\varphi(0,x) = 0$.*

(B2) *ρ es una solución débil de (4.1), primera ecuación.*

(B3) *en adición, para casi todo $t > 0$*

$$\begin{aligned}&\forall (cl, cr) \in \mathcal{G}(F(t)), \\ &\Phi(\rho(t,0^-), c_l)\ \geq\ \Phi(\rho(t,0^+), c_r).\end{aligned} \tag{4.10}$$

(C) *ρ satisface la siguiente desigualdad de entopía global*

(C1) *existe $M > 0$ tal que para todo $(c_l, c_r) \in [0,1]^2$ y toda función test no negativa $\varphi \in C_c^\infty(\Pi)$*

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\,|\rho(t,x) - c(c)|\varphi_t(t,x) + sgn(\rho(t,x) - c(x))(f(\rho(t,x)) - f(c(x)))\,\varphi_x(t,x))\ dx\,dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x) - c(x)|\,\varphi(0,x)\ dx \geq -M \int_0^{+\infty} dist((c_l, c_r), \mathcal{G}(F(t)))\varphi(t,0)\,dt\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $c(x)$ definida en (4.7) y dist es la distancia de funciones en $\mathbb{R}^2$.

La demostración se encuentra en [1], Proposición 2.6.

Definición 4.1.4. *Si cualquiera de las propiedades **(A)**, **(B)** o **(C)** se la proposición anterior se cumplen, entonces ρ es llama una solución de entropía-*G *del problema (4.1).*

Teorema 4.1.2. *Una función $\rho \in L^\infty(\Pi)$ es una solución de entropía-*G *si y sólo si esta es una solución de entropía-CG.*

La prueba de este teorema se encuentra en [1], Teorema 2.9.

Para garantizar unicidad de la solución de entropía se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3. *Para cualquier $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ y $F \in^\infty (\mathbb{R}^+;[0,f(\overline{\rho})])$ existe una y sólo una solución de entropía-CG al problema (4.1). La cual por el Teorema 4.0.2 es también una solución de entropia-G.*

La prueba de este teorema se encuentra en [1], Teorema 2.11.

4.2. Esquema Numérico

Ahora se busca dar solución al problema (4.1) mediante esquemas numéricos. Para ello se considera la discretización espacial y temporal propuesta en la Sección 3.1, con la definición 3.1.1, tal que en $x_{\frac{1}{2}} = 0$ se encuentra la restricción.

El esquema a estudiar es de la forma

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \lambda \left[g\left(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n, F_{j+\frac{1}{2}}^n\right) - g\left(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, F_{j-\frac{1}{2}}^n\right)\right] \tag{4.12}$$

donde $\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, la sucesión $\{F_{j+\frac{1}{2}}\}_j$ está dada por

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} (1/\Delta t)\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} F(s)ds & , \text{ para } j = 0 \\ f(\overline{\rho}) & , \text{ para } j \neq 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

y el flujo numérico g está definido como

$$g(u,v,f) = \min(h(u,v), f) \tag{4.14}$$

donde h es el flujo numérico, el cual es lipschitz continuo, con constante de Lipschitz L, es consistente y monótono. Para cálculos numéricos consideró el flujo h como en (3.17).

Para (4.12) se usará la notación

$$\rho_j^{n+1} = \mathcal{G}(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, \rho_{j+1}^n, F_{j-\frac{1}{2}}^n, F_{j+\frac{1}{2}}^n). \tag{4.15}$$

Proposición 4.2.1 (Estimación L^∞)**.** *Suponiendo que $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, bajo la condición CFL*

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2L}, \tag{4.16}$$

la función $\mathcal{G}$ es no decreciente con respecto a sus tres argumentos y el esquema (4.12) satisface

$$0 \leq \rho_j^n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{4.17}$$

Demostración. Derivando el esquema (4.12)-(4.14) se tiene

- $\dfrac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_{j-1}^n} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial \rho_{j-1}^n}\left(g(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n, F_{j-\frac{1}{2}}^n)\right) = \lambda \dfrac{\partial}{\partial \rho_{j-1}^n}\left(\text{mín}(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n), F_{j-\frac{1}{2}}^n)\right)$
  como h es no decreciente con respecto a la primera variable, entonces
  $\dfrac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_{j-1}^n}\begin{cases} \geq 0, & \text{si mín}(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n), F_{j-\frac{1}{2}}^n) = h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n) \\ = 0, & \text{si mín}(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n), F_{j-\frac{1}{2}}^n) = F_{j-\frac{1}{2}}^n \end{cases}$
- $\dfrac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_j^n} = 1 - \lambda\left[\dfrac{\partial}{\partial \rho_j^n}\left(\text{mín}(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), F_{j+\frac{1}{2}}^n)\right) - \dfrac{\partial}{\partial \rho_j^n}\left(\text{mín}(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n), F_{j-\frac{1}{2}}^n)\right)\right]$
  como h es lipschitz continua, con constante L, $\partial_1 h(u,v) \leq L_1$ y $\partial_2 h(u,v) \leq L_2$, con $L_1, L_2 \leq L$, ahora si $\text{mín}(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), F_{j+\frac{1}{2}}^n) = h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n)$ y
  $\text{mín}(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n), F_{j-\frac{1}{2}}^n) = h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n)$ entonces
  $$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_j^n} &= 1 - \lambda\partial_1(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n) + \lambda\partial_2(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n) \\ &\geq 1 - \lambda L_1 - \lambda L_2 \\ &\geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}2L, \end{aligned}$$
  así por condición CFL (4.16) $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}2L \leq 1$, teniendo $\dfrac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_j^n} \geq 0$.
  Si $\text{mín}(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), F_{j+\frac{1}{2}}^n) = F_{j+\frac{1}{2}}^n$ y $\text{mín}(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n), F_{j-\frac{1}{2}}^n) = F_{j-\frac{1}{2}}^n$
  $\dfrac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_j^n} = 1 - \lambda(0-0) = 1 \geq 0.$

Si $\text{mín}(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), F_{j+\frac{1}{2}}^n) = h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n)$ y $\text{mín}(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n), F_{j-\frac{1}{2}}^n) = F_{j-\frac{1}{2}}^n$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_j^n} &= 1 - \lambda \partial_1(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n) + 0 \\ &\geq 1 - \lambda L_1 \\ &\geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} L\end{aligned}$$

así por condición CFL (4.16) $\frac{\Delta t}{\Delta x} L \leq \frac{1}{2}$, teniendo $\frac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_j^n} \geq 0$.

Si $\text{mín}(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), F_{j+\frac{1}{2}}^n) = F_{j+\frac{1}{2}}^n$ y $\text{mín}(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n), F_{j-\frac{1}{2}}^n) = h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_j^n} &= 1 - 0 + \lambda \partial_2(h(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n) \\ &\geq 1 - \lambda L_2 \\ &\geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} L,\end{aligned}$$

así por condición CFL (4.16) $\frac{\Delta t}{\Delta x} L \leq \frac{1}{2}$, teniendo $\frac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_j^n} \geq 0$.

- $\frac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_{j+1}^n} = -\lambda \frac{\partial}{\partial \rho_{j+1}^n} \left(\text{mín}(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), F_{j+\frac{1}{2}}^n) \right)$
  como h es no creciente con respecto a la segunda variable, entonces
  $$\frac{\partial \rho_j^{n+1}}{\partial \rho_{j+1}^n} \begin{cases} \geq 0, & \text{si } \text{mín}(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), F_{j+\frac{1}{2}}^n) = h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n) \\ = 0, & \text{si } \text{mín}(h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), F_{j+\frac{1}{2}}^n) = F_{j+\frac{1}{2}}^n. \end{cases}$$

Ahora, usando la consistencia del flujo h

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(0,0,0,F_1,F_2) &= -\lambda\left(\text{mín}(h(0,0),F_2) + \lambda\,\text{mín}(h(0,0),F_1)\right) \\ &= -\lambda\left(\text{mín}(f(0),F_2) + \lambda\,\text{mín}(f(0),F_1)\right) \\ &= -\lambda\left(\text{mín}(0,F_2) + \lambda\,\text{mín}(0,F_1)\right) = 0, \\ \mathcal{G}(1,1,1,F_1,F_2) &= 1 - \lambda\left(\text{mín}(h(1,1),F_2) + \lambda\,\text{mín}(h(1,1),F_1)\right) \\ &= 1 - \lambda\left(\text{mín}(f(1),F_2) + \lambda\,\text{mín}(f(1),F_1)\right) \\ &= 1 - \lambda\left(\text{mín}(0,F_2) + \lambda\,\text{mín}(0,F_1)\right) = 1.\end{aligned}$$

Así por monotonicidad de $\mathcal{G}$, si $(\rho_j^n)_j \in [0,1]$ entonces $\forall j$, $\rho_j^{n+1} \in [0,1]$, satisfaciendo (4.17). $\square$

Se definen $a \perp b = \text{mín}(a,b)$ y $a \top b = max(a,b)$.

El siguiente Lema es un variante del propuesto en [1], ya que en este escrito se considera una malla equiespaciada y $R = 1$.

Lema 2 (Estimación débil-BV)**.** *Sea $\xi \in (0,1)$ y sean $T > \Delta t$ y $1 > \Delta x$ dos constantes positivas. Denotando por I_0, I_1 y N los índices tales que $-1 \in \overline{(x_{I_0-\frac{1}{2}}, x_{I_0+\frac{1}{2}})}$, $1 \in \overline{(x_{I_1-\frac{1}{2}}, x_{I_1+\frac{1}{2}})}$ y $T \in (N\Delta t, (N+1)\Delta t]$. Entonces si el paso de tiempo Δt satisface la condición CFL*

$$\Delta t \leq (1-\xi)\frac{\Delta x}{2L}, \tag{4.18}$$

existe una constante C que solo depende de T, ξ, f y ρ_0 tal que

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=I_0,\, i\neq 0,1} \left(\max_{(p,q)\in\mathbb{I}(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n)} |h(p,q)-f(p)| + \max_{(p,q)\in\mathbb{I}(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n)} |h(p,q)-f(q)| \right) \leq Ch^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.19}$$

donde $\mathbb{I}(a,b)$ está definido como $\{(p,q) \in [a \perp b, a \top b], (q-p)(b-a) \geq 0$.

La prueba de este Lema, con las variaciones mencionadas anteriormente se encuentra en [1] Lema 4.3.

Proposición 4.2.2 (Desigualdad de entropía discreta)**.** *Sea $\kappa_j = c_l$ para $j \leq 0$ y $\kappa_j = c_r$ para $j > 0$, donde $(c_l, c_r) \in [0,1]^2$. Entonces el esquema (4.12-4.14) cumple la siguiente desigualdad*

$$|\rho_j^{n+1} - \kappa_j| - |\rho_j^n - \kappa_j| + \lambda(G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n) - \lambda|H_j^n| \leq 0 \tag{4.20}$$

donde $G_{j+\frac{1}{2}}^n = g(\rho_j^n \top \kappa_j, \rho_{j+1}^n \top \kappa_{j+1}, F_{j+\frac{1}{2}}) - g(\rho_j^n \perp \kappa_j, \rho_{j+1}^n \perp \kappa_{j+1}, F_{j+\frac{1}{2}})$ y $H_j^n = h(\kappa_j, \kappa_{j+1}) \perp F_{j+\frac{1}{2}} - h(\kappa_{j-1}, \kappa_j) \perp F_{j-\frac{1}{2}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Usando la notación de (4.15) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F_{j-\frac{1}{2}}, F_{j+\frac{1}{2}}) &= \kappa_j - \lambda\left[h(\kappa_j, \kappa_{j+1}) \perp F_{j+\frac{1}{2}} - h(\kappa_{j-1}, \kappa_j) \perp F_{j-\frac{1}{2}}\right] \\ &= \kappa_j - \lambda H_j^n.\end{aligned}$$

Así, $|\rho_j^{n+1} - \kappa_j| = \rho_j^{n+1} \top \kappa_j - \rho_j^{n+1} \perp \kappa_j$.

- Para $H_j^n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\rho_j^{n+1} \top \kappa_j - \lambda H_j^n &= (\rho_j^{n+1} - \lambda H_j^n) \top (\kappa_j - \lambda H_j^n) \\
&= (\rho_j^{n+1} - \lambda H_j^n) \top \mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&\leq \rho_j^{n+1} \top \mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&= \mathcal{G}(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j, \rho^n_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \top \mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&\leq \mathcal{G}(\rho^n_{j-1} \top \kappa_{j-1}, \rho^n_j \top \kappa_j, \rho^n_{j+1} \top \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_j^{n+1} \perp \kappa_j &= \mathcal{G}(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j, \rho^n_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \perp \kappa_j \\
&\geq \mathcal{G}(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j, \rho^n_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \perp (\kappa_j - \lambda H_j^n) \\
&= \mathcal{G}(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j, \rho^n_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \perp \mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&\geq \mathcal{G}(\rho^n_{j-1} \perp \kappa_{j-1}, \rho^n_j \perp \kappa_j, \rho^n_{j+1} \perp \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|\rho_j^{n+1} - \kappa_j| &\leq \lambda H_j^n + \mathcal{G}(\rho^n_{j-1} \top \kappa_{j-1}, \rho^n_j \top \kappa_j, \rho^n_{j+1} \top \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&\quad - \mathcal{G}(\rho^n_{j-1} \perp \kappa_{j-1}, \rho^n_j \perp \kappa_j, \rho^n_{j+1} \perp \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&= \lambda H_j^n + \rho_j^n \top \kappa_j - \lambda \left(g(\rho^n_j \top \kappa_j, \rho^n_{j+1} \top \kappa_{j+1}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) - g(\rho^n_{j-1} \top \kappa_{j-1}, \rho^n_j \top \kappa_j, F^n_{j-\frac{1}{2}}) \right) \\
&\quad - \rho^n_j \perp \kappa_j + \lambda \left(g(\rho^n_j \perp \kappa_j, \rho^n_{j+1} \perp \kappa_{j+1}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) - g(\rho^n_{j-1} \perp \kappa_{j-1}, \rho^n_j \perp \kappa_j, F^n_{j-\frac{1}{2}}) \right)
\end{aligned}$$

Así, $|\rho_j^{n+1} - \kappa_j| \leq \lambda H_j^n + |\rho_j^n - \kappa_j| - \lambda \left(G^n_{j+\frac{1}{2}} - G^n_{j-\frac{1}{2}} \right)$.

- Para $H_j^n \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\rho_j^{n+1} \top \kappa_j &= \mathcal{G}(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j, \rho^n_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \top \kappa_j \\
&\leq \mathcal{G}(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j, \rho^n_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \top (\kappa_j - \lambda H_j^n) \\
&= \mathcal{G}(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j, \rho^n_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \top \mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&\leq \mathcal{G}(\rho^n_{j-1} \top \kappa_{j-1}, \rho^n_j \top \kappa_j, \rho^n_{j+1} \top \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_j^{n+1} \perp \kappa_j - \lambda H_j^n &= (\rho_j^{n+1} - \lambda H_j^n) \perp (\kappa_j - \lambda H_j^n) \\
&= (\rho_j^{n+1} - \lambda H_j^n) \perp \mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&\geq \rho_j^{n+1} \perp \mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&= \mathcal{G}(\rho^n_{j-1}, \rho^n_j, \rho^n_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \perp \mathcal{G}(\kappa_{j-1}, \kappa_j, \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}) \\
&\geq \mathcal{G}(\rho^n_{j-1} \perp \kappa_{j-1}, \rho^n_j \perp \kappa_j, \rho^n_{j+1} \perp \kappa_{j+1}, F^n_{j-\frac{1}{2}}, F^n_{j+\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
|\rho_j^{n+1} - \kappa_j| \leq & -\lambda H_j^n + \mathcal{G}(\rho_{j-1}^n \top \kappa_{j-1}, \rho_j^n \top \kappa_j, \rho_{j+1}^n \top \kappa_{j+1}, F_{j-\frac{1}{2}}^n, F_{j+\frac{1}{2}}^n) \\
& -\mathcal{G}(\rho_{j-1}^n \perp \kappa_{j-1}, \rho_j^n \perp \kappa_j, \rho_{j+1}^n \perp \kappa_{j+1}, F_{j-\frac{1}{2}}^n, F_{j+\frac{1}{2}}^n) \\
= & -\lambda H_j^n + \rho_j^n \top \kappa_j - \lambda \left(g(\rho_j^n \top \kappa_j, \rho_{j+1}^n \top \kappa_{j+1}, F_{j+\frac{1}{2}}^n) - g(\rho_{j-1}^n \top \kappa_{j-1}, \rho_j^n \top \kappa_j, F_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) \\
& -\rho_j^n \perp \kappa_j + \lambda \left(g(\rho_j^n \perp \kappa_j, \rho_{j+1}^n \perp \kappa_{j+1}, F_{j+\frac{1}{2}}^n) - g(\rho_{j-1}^n \perp \kappa_{j-1}, \rho_j^n \perp \kappa_j, F_{j-\frac{1}{2}}^n) \right)
\end{aligned}
$$

Así, $|\rho_j^{n+1} - \kappa_j| \leq -\lambda H_j^n + |\rho_j^n - \kappa_j| - \lambda \left(G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$.

□

Teorema 4.2.1. *Bajo la condición CFL (4.16), el esquema de volúmenes finitos (4.12)-(4.14) converge en $L^p_{loc}(\Pi)$ para cualquier $1 \leq p < +\infty$ a la única solución de entropía-CG del problema (4.1), la cual también es la única solución de entropía-G de dicho problema.*

Este teorema se obtiene de la Proposición 3.3, en [1]. El cual garantiza la convergencia del esquema a la única solución de entropía del problema.

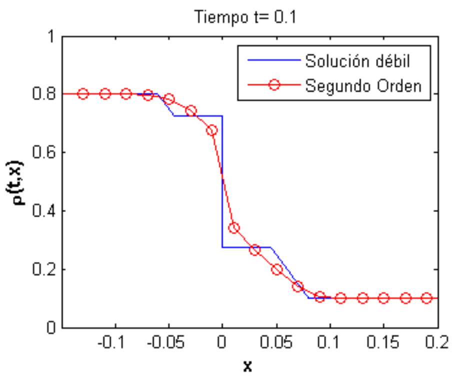
Antes de analizar los problemas propuestos utilizando método de volúmenes finitos, en la siguiente sección se introduce una modificación al esquema de orden 2 para obtener una correcta aproximación de la solución débil.

4.3. Modificación del algoritmo (4.12)-(4.14) usando esquemas de segundo orden

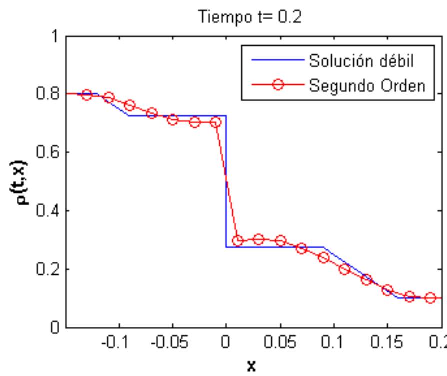
En esta sección comenzamos con utilizar el esquema de segundo orden descrito en la Sección 3.4 para resolver el problema

$$
\begin{cases}
\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\
\rho(0,x) = \begin{cases} 0.8 & , x < 0 \\ 0.1 & , x > 0 \end{cases} \\
F(t) = 0.2,
\end{cases}
$$

en las Figuras 4.5(a) y 4.5(b) se observa que en la solución aproximada con el método de segundo orden hay puntos que no cumplen la condición (4.5), por que el esquema no converge a la solución de entropía del problema, por lo cual es necesario realizar algunas modificaciones al esquema.



(a)



(b)

Figura 4.5: (a) Comparación entre la solución débil y el esquema de segundo orden en $t = 0.1$. (b) Comparación entre la solución débil y el esquema de segundo orden en $t = 0.2$.

La variación del algoritmo es implementar un método de segundo orden, en el cual se busca la celda donde se produce el choque no clásico y en ella considerar una reconstrucción constante.

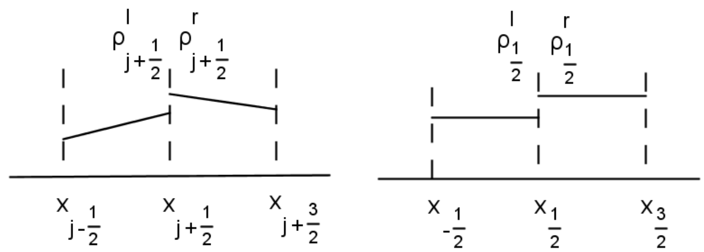
Considerando la recontrucción lineal (3.19), el esquema conservativo (3.21) y el método Runge-Kutta de segundo orden (3.23), la modificación consiste en definir el indicador de suavidad como

$$\theta_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = \{0,\, 1\} \\ \dfrac{\rho_j^n - \rho_{j-1}^n}{\rho_{j+1}^n - \rho_j^n} & \text{si } j \neq \{0,\, 1\}, \end{cases} \tag{4.21}$$

y luego utilizar algún flux limiter de la sección 3.4. Además de considerar el flujo $\widehat{g}^n_{j+\frac{1}{2}}$ como

$$\widehat{g}^n_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \text{mín}\left(g^n_{j+\frac{1}{2}}\left(\rho^L_{j+\frac{1}{2}}, \rho^R_{j+\frac{1}{2}}\right), F^n_{j+\frac{1}{2}} \right) & \text{si } j = 0 \\ g^n_{j+\frac{1}{2}}\left(\rho^L_{j+\frac{1}{2}}, \rho^R_{j+\frac{1}{2}}\right) & \text{si } j \neq 0, \end{cases} \tag{4.22}$$

con g algún flujo de la Sección 3.5.

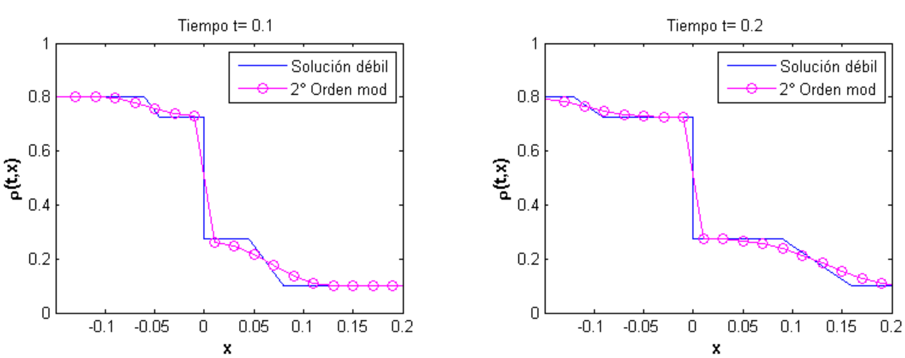


(a) (b)

Figura 4.6: (a) Reconstrucción cuando $j \neq 0$. (b) Modificación en la celda cuando $j = 0$.

El esquema modificado aproxima mejor en las rarefacciones del problema; sin embargo, en choques se comporta igual que el esquema de primer orden, esto debido a que en las discontinuidades el esquema de segundo orden modificado se comporta como un esquema de primer orden.

En las Figuras 4.7(a) y 4.7(b) se observa que la solución aproximada con el método cumple con la condición para que el converja a la solución de entropía del problema.



(a) (b)

Figura 4.7: (a) Comparación entre la solución débil y el esquema de segundo orden modificado en $t = 0.1$. (b) Comparación entre la solución débil y el esquema de segundo orden modificado en $t = 0.2$.

4.4. Resultados numéricos y aplicaciones

En esta sección se resolverán de manera numérica los ejemplos propuestos en la Sección 4.2 resueltos de forma analítica. Para resolver los ejemplos se utilizan como esquema de primer orden al esquema (4.12)-(4.14) con flujo Godunov y como esquema de segundo orden al esquema modificado de la sección anterior utilizando el método Runge-Kutta con flux limiter minmod y flujo Godunov.

Ejemplo 11. *En el ejemplo 9, se planteó el problema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.4 & x < 0, \\ 0.5 & x > 0, \end{cases} \\ f(\rho(t,0)) \leq F(t) = 0.2 \ , \forall t. \end{cases}$$

En la Figura 4.8 se comparan las soluciones numéricas obtenidas con los dos esquemas numéricos respecto de la solución débil calculada, con $\Delta x = \frac{1}{100}$. En la Figura 4.9(b) se muestra una aproximación del choque no entrópico, no existiendo diferencia entre las aproximaciones obtenidas por ambos métodos. Mientras que en las Figuras 4.9(a) y 4.9(c) se observa que el esquema de segundo orden modificado aproxima mejor la solución débil del problema.

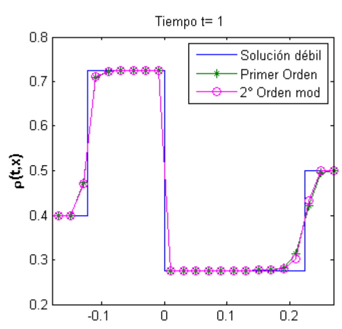
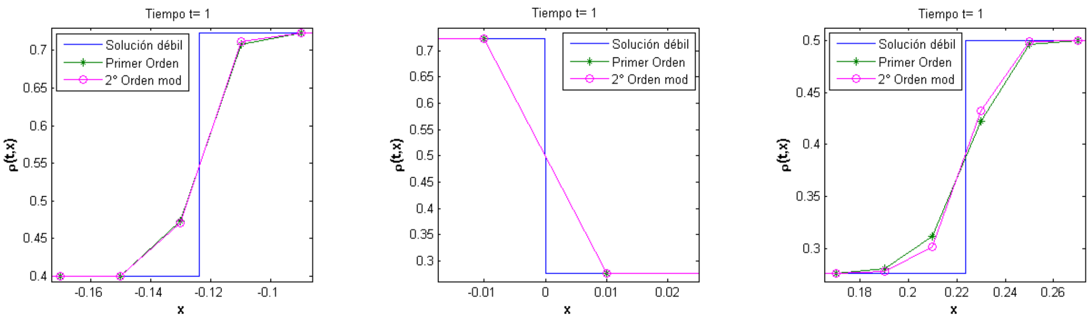


Figura 4.8: Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y la solución débil en el tiempo $t = 1$.



(a) (b) (c)

Figura 4.9: (a) Zoom primer choque, de izquierda a derecha. (b) Zoom segundo choque, de izquierda a derecha. (c) Zoom tercer choque, de izquierda a derecha.

En la siguiente tabla se tabulan los errores de aproximación y razón de convergencia de cada esquema, mostrando que el esquema de segundo orden modificado produce menor error en comparación con el esquema de primer orden.

Número de celdas	*Primer Orden*		*Segundo Orden modificado*	
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^1*-error*	*Convergencia* L^1
100	$4.27E-03$	-	$3.63E-03$	-
200	$2.73E-03$	$6.45E-01$	$2.48E-03$	$5.50E-01$
400	$1.10E-03$	$1.31E+00$	$9.44E-04$	$1.40E+00$
800	$7.81E-04$	$4.94E-01$	$7.26E-04$	$3.79E-01$
1600	$2.53E-04$	$1.63E+00$	$2.04E-04$	$1.83E+00$
3200	$1.51E-04$	$7.45E-01$	$1.29E-04$	$6.61E-01$

Ejemplo 12. *En el ejemplo 10, se planteó el problema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.8 & x < 0, \\ 0.1 & x > 0, \end{cases} \\ f(\rho(t,0)) \leq F(t) = 0.2 \ , \forall t. \end{cases}$$

En la Figura (4.10) se comparan las soluciones numéricas obtenidas con los dos esquemas numéricos respecto de la solución débil calculada, con $\Delta x = \frac{1}{100}$*. En la Figura 4.11(b) se muestra la aproximación del choque no entrópico, en el cual no hay diferencia entre las aproximaciones obtenidas por ambos métodos. Mientras que en las Figuras 4.11(a) y 4.11(c) se observa que el esquema de segundo orden modificado aproxima mejor la solución débil del problema en las rarefacciones.*

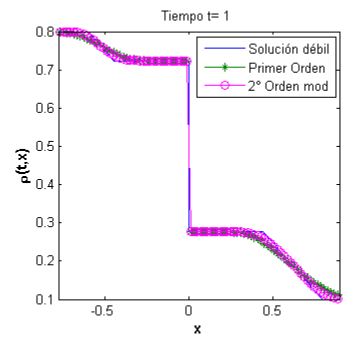
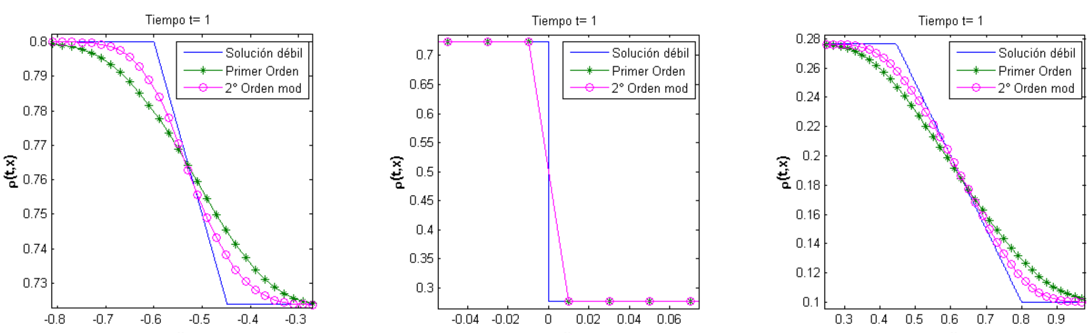


Figura 4.10: Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y la solución débil en el tiempo $t = 1$.



(a) (b) (c)

Figura 4.11: (a) Zoom de primera rarefacción, de izquierda a derecha. (b) Zoom del choque. (c) Zoom de segunda rarefacción, de izquierda a derecha.

En la siguiente tabla se tabulan los errores de aproximación y razón de convergencia de cada esquema, mostrando que el esquema de segundo orden modificado produce un error menor en comparación con el esquema de primer orden.

Número de celdas	*Primer Orden*		*Segundo Orden modificado*	
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^1*-error*	*Convergencia* L^1
100	$1.34E-02$	-	$6.52E-03$	-
200	$8.67E-03$	$6.28E-01$	$3.40E-03$	$9.39E-01$
400	$5.44E-03$	$6.72E-01$	$1.76E-03$	$9.50E-01$
800	$3.35E-03$	$6.99E-01$	$9.24E-04$	$9.30E-01$
1600	$2.04E-03$	$7.16E-01$	$5.07E-04$	$8.66E-01$
3200	$1.23E-03$	$7.30E-01$	$3.00E-04$	$7.57E-01$

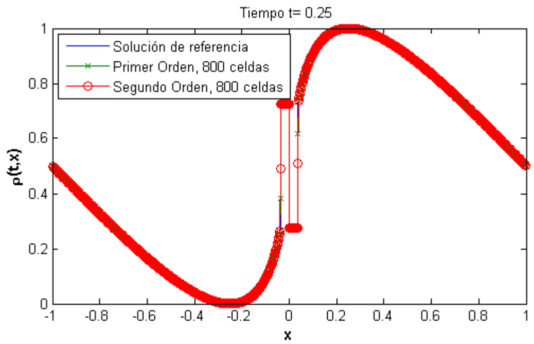
Ejemplo 13. *Para analizar la convergencia de los métodos de primer orden y de segundo orden modificado, se estudia el siguiente problema con restricción y dato inicial suave y periódico*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 & \rho \in [0,1], x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(0,x) = \dfrac{1 + sen(\pi x)}{2} & x \in [-1,1], \\ f(\rho(t,0)) \leq F(t) = 0.2 \ , \forall t. \end{cases}$$

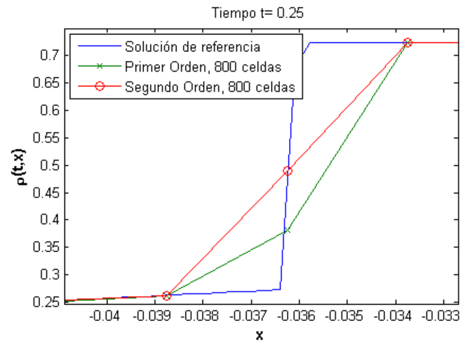
Se tomará como solución de referencia el esquema de segundo orden modificado con 6400 *celdas, en un tiempo de* $T = 0.25$.

En las Figura 4.12(a) se comparan las soluciones numéricas obtenidas con los dos esquemas respecto de la solución de referencia. En la Figura 4.12(c) se muestra la aproximación del choque no cláico, en el cual no hay diferencia entre las aproximaciones obtenidas con ambos métodos. En las Figuras 4.12(b) y 4.12(d) se logra observar que el esquema de segundo orden modificado aproxima mejor la solución del problema.

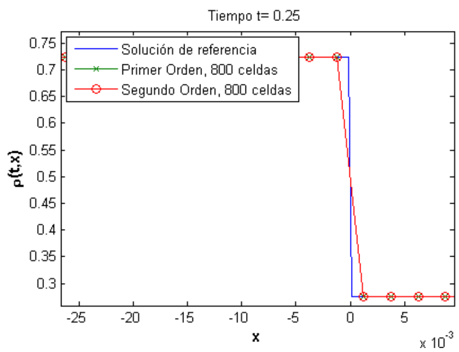
En las siguientes tablas se muestra el error producido por los esquemas de primer orden y de segundo orden, comparando los errores L^1 *y* L^2*, y la razón de convergencia que se produce con cada uno. Observándose que el esquema de segundo orden con error* L^1 *produce un menor error y genera una mayor razón de convergencia en comparación a los demás.*



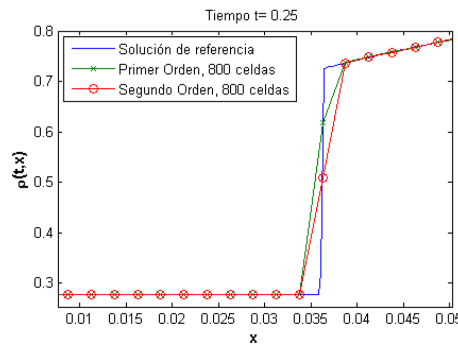
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.12: (a) Comparación entre solución de referencia y esquemas de primer y segundo orden modificado. (b) Zoom primer choque, de izquierda a derecha. (c) Zoom segundo choque, de izquierda a derecha. (d) Zoom tercer choque, de izquierda a derecha.

	Primer Orden			
Celdas	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^2*-error*	*Convergencia* L^2
50	$1.24E-02$	–	$2.22E-02$	–
100	$6.40E-03$	$9.51E-01$	$1.55E-02$	$5.21E-01$
200	$3.30E-03$	$9.54E-01$	$1.11E-02$	$4.85E-01$
400	$1.68E-03$	$9.78E-01$	$7.70E-03$	$5.24E-01$
800	$8.46E-04$	$9.88E-01$	$5.59E-03$	$4.63E-01$

Celdas	*Segundo Orden modificado* L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^2*-error*	*Convergencia* L^2
50	$3.61E-03$	$-$	$6.24E-03$	$-$
100	$9.55E-04$	$1.92E+00$	$2.05E-03$	$1.67E+00$
200	$2.59E-04$	$1.88E+00$	$7.75E-04$	$1.40E+00$
400	$6.85E-05$	$1.92E+00$	$2.69E-04$	$1.52E+00$
800	$1.78E-05$	$1.95E+00$	$9.37E-05$	$1.53E+00$

Ejemplo 14. *Un problema adicional, considerando la restricción en* $x = 0$*, es*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.1 & x < 0, \\ 0 & x > 0, \end{cases} \\ f(\rho(t,0)) \leq F(t) = 0 \ , \forall t. \end{cases}$$

En la Figura 4.13 se comparan las soluciones obtenidas con los dos esquemas numéricos respecto de la solución débil del calculada, con $\Delta x = \frac{1}{100}$*. En las Figura 4.14(b) se muestra la aproximación del choque no entrópico y en la Figura 4.14(a) se muestra la aproximación del choque clásico, donde se observa que el esquema de segundo orden actúa como uno de primer orden en los choques.*

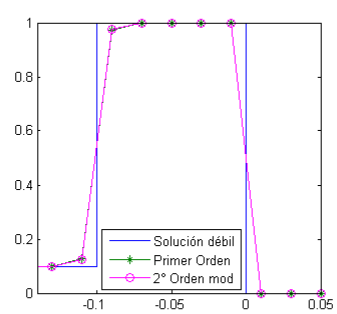
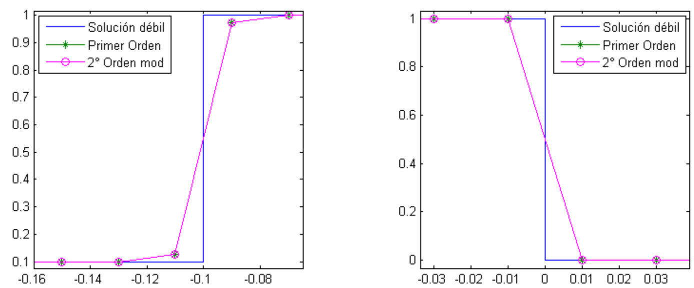


Figura 4.13: Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y la solución débil en el tiempo $t = 1$.



(a) (b)

Figura 4.14: (a) Zoom primer choque, de izquierda a derecha. (b) Zoom segundo choque, de izquierda a derecha.

Ejemplo 15. *Considerando ahora una función con un punto de inflexión*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho)^2)_x = 0, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.9 & x < 0, \\ 0.1 & x > 0, \end{cases} \\ f(\rho(t,0)) \leq F(t) = 0.13 \ , \forall t. \end{cases}$$

Al igual que en los ejemplos anteriores en las Figuras 4.15, 4.16(a), 4.16(b) y 4.16(c) se observa que el esquema de segundo orden modificado aproxima mejor a la solución del problema que el esquema de primer orden.

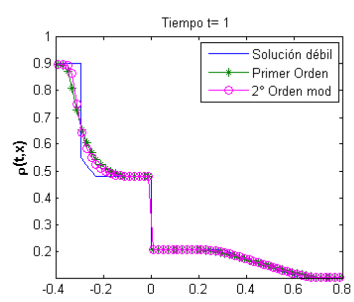
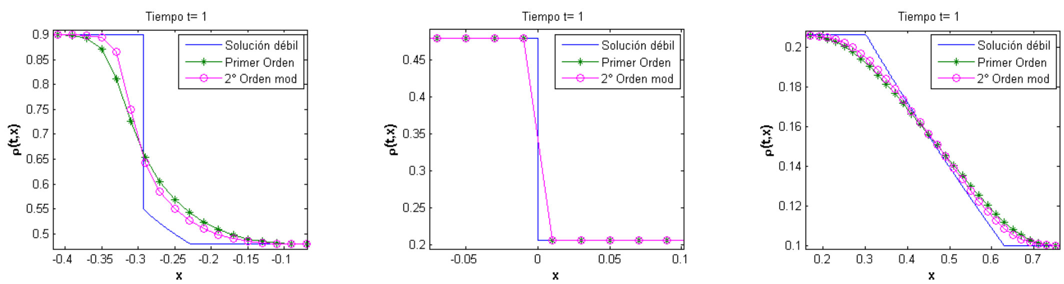


Figura 4.15: Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y la solución débil en el tiempo $t = 1$.



(a) (b) (c)

Figura 4.16: (a) Zoom primer choque y rarefacción, de izquierda a derecha. (b) Zoom segundo choque, de izquierda a derecha. (c) Zoom segunda rarefacción, de izquierda a derecha.

Ejemplo 16. *Utilizando el mismo flujo anterior pero distinta restricción*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho)^2)_x = 0, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.9 & x < 0, \\ 0.1 & x > 0, \end{cases} \\ f(\rho(t,0)) \leq F(t) = 0.1 \ , \forall t. \end{cases}$$

En las Figuras 4.17, 4.18(a), 4.18(b) y 4.18(c) se observa que los esquemas de primer orden y de segundo orden modificado actúan de igual manera en el choque no clásico; sin embargo, en rarefacciones y choques clásicos el esquema de segundo orden modificado aproxima mejor a la solución débil del problema.

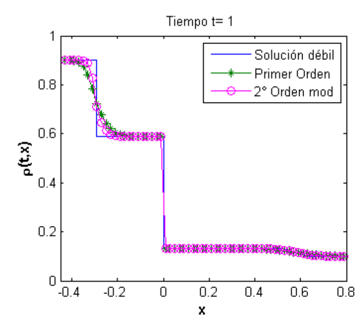
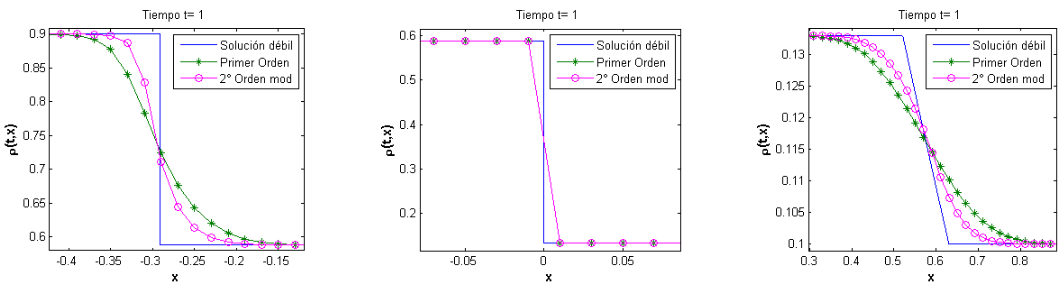


Figura 4.17: Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y la solución débil en el tiempo $t = 1$.



(a) (b) (c)

Figura 4.18: (a) Zoom primer choque y rarefacción, de izquierda a derecha. (b) Zoom segundo choque, de izquierda a derecha. (c) Zoom segunda rarefacción, de izquierda a derecha.

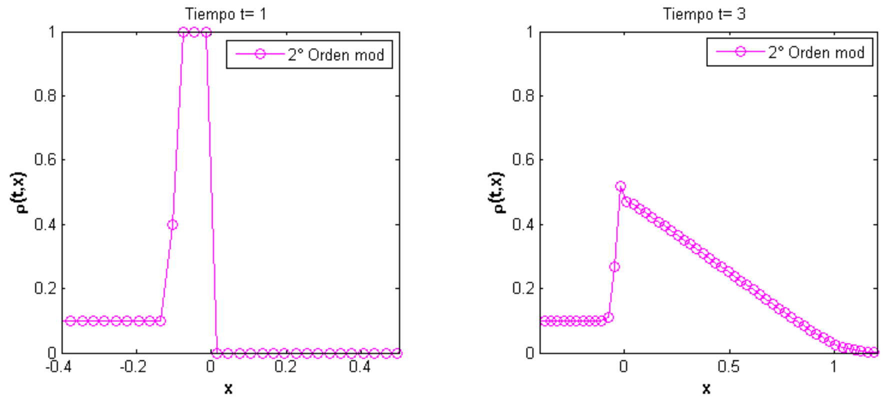
Utilizando una restricción constante es posible modelar la presencia de semáforos en el tránsito. Se optó por realizar la simulación sólo con el esquema de segundo orden ya que, a pesar de aproximar de igual manera que el esquema de primer orden en choques debido a que el esquema de segundo orden en choques actúa como uno de primer orden, tiene una mejor precisión cuando ocurren rarefacciones.

Ejemplo 17. *Una primera situación a considerar es la presencia de un sólo semáforo que actúa cada* 4 *en tiempo, donde el problema se presenta como*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.1 & x < 0, \\ 0 & x > 0, \end{cases} \quad , \quad f(\rho(t,0)) \le F(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,2], \\ 0.25 & t \in [2,4], \end{cases} \end{cases}$$

donde la restricción $F(t)$ *es periódica, de periodo* 4*.*

En la Figura 4.19(a) se observa la acumulación de los vehículos debido a la presencia del semáforo que actúa en rojo. En la fig. 4.19(b), en cambio, debido al tiempo transcurrido el semáforo se encuentra en verde lo que permite que los vehículos que quedaron detenidos en el semáforo continuen su trayecto.



(a) (b)

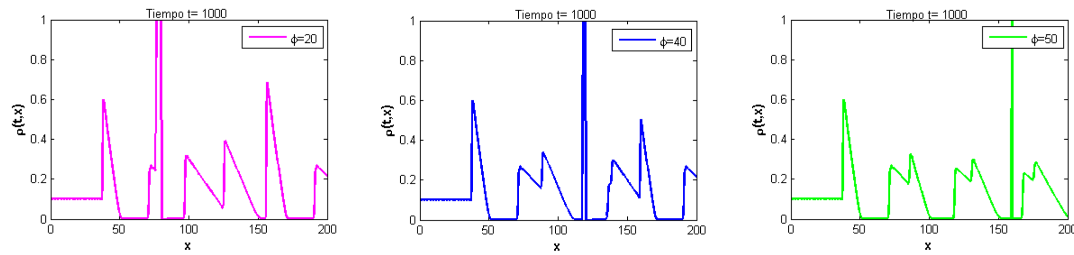
Figura 4.19: (a) Esquema de segundo orden modificado (100 celdas) en $t = 1$. (b) Esquema de segundo orden modificado (100 celdas) en $t = 3$.

Ejemplo 18. *Una segunda situación a modelar es la presencia de cuatro semáforos presentes cada* 40 *en espacio, es decir, ubicados en* 40, 80, 120 *y* 160 *en espacio; los cuales se activan y desactivan cada* 30 *de tiempo alternadamente, el problema se presenta como*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.1 & x < 0, \\ 0 & x > 0, \end{cases} \quad , \quad f(\rho(t,40)) \leq F_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,30], \\ 0.25 & t \in]30,60], \end{cases} \end{cases}$$

con la restricción $F_1(t)$ periódica, de periodo 60, simulando el primer semáforo. Los otros semáforos se modelan por la función $F_i(t) = F_1(t - i\phi)$, $i = 2,3,4$, donde $\phi \in \mathbb{R}$ es el tiempo en que actúa cada semáforo.

En particular, se analiza la evolución de la masa total para varios valores de ϕ, esto se muestra en las Figuras 4.20(a), 4.20(b) y 4.20(c). Además, el caso 1 semáforo es cuando actúa un sólo semáforo, siendo el caso óptimo 4.21. Sin embargo, considerando los 4 semáforos el caso óptimo ocurre cuando $\phi = 50$, esto indica que para este valor de ϕ se minimiza la densidad total a lo largo del tiempo.



(a) (b) (c)

Figura 4.20: Variación de la masa en $t = 1000$. (a) Para $\phi = 20$. (b) Para $\phi = 40$. (c) Para $\phi = 50$.

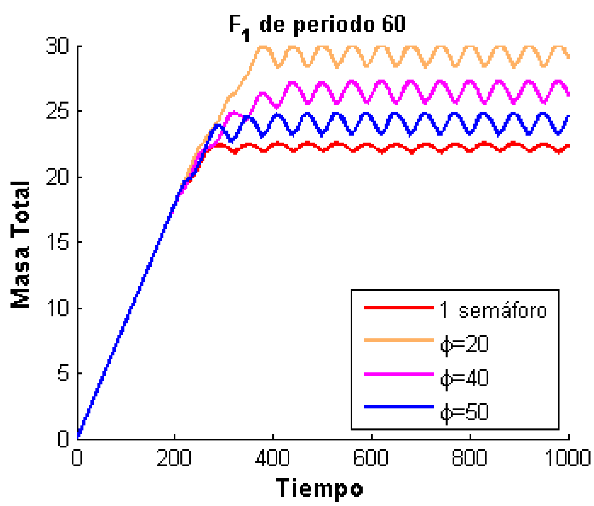


Figura 4.21: Tiempo de variación de la masa total para diferentes casos de ϕ.

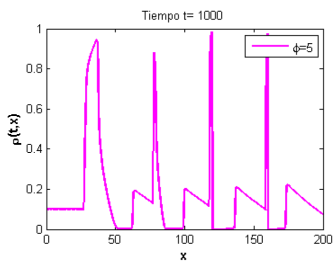
Ejemplo 19. *Si consideramos la situación del ejemplo anterior, pero modelada por el flujo $f(\rho) = \rho(1-\rho)^2$, se tiene el problema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho)^2)_x = 0, \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.1 & x < 0, \\ 0 & x > 0, \end{cases} \quad , \quad f(\rho(t,40)) \leq F_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,30], \\ 0.25 & t \in]30,60], \end{cases} \end{cases}$$

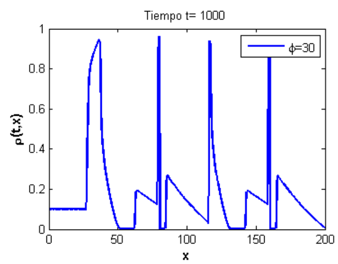
con la restricción $F_1(t)$ periódica, de periodo 60, simulando el primer semáforo. De forma análoga al ejemplo anterior, los otros semáforos se modelan por la función $F_i(t) = F_1(t -$

$i\phi$), $i = 2, 3, 4$, donde $\phi \in \mathbb{R}$ es el tiempo en que actúa cada semáforo.

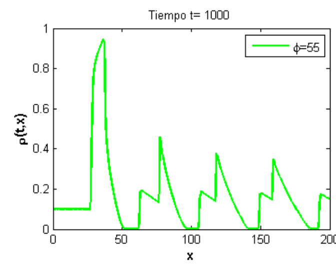
Se analiza la evolución de la masa total para varios valores de ϕ, ver Figuras 4.22(a), 4.22(b) y 4.22(c). El caso 1 semáforo es cuando actúa un sólo semáforo siendo el caso óptimo, ver Figura 4.23. Sin embargo, considerando los 4 semáforos el caso óptimo ocurre cuando $\phi = 5$, indicando que para este valor de ϕ se minimiza la densidad total a lo largo del tiempo.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.22: Variación de la masa en $t = 1000$. (a) Para $\phi = 5$. (b) Para $\phi = 30$. (c) Para $\phi = 55$.

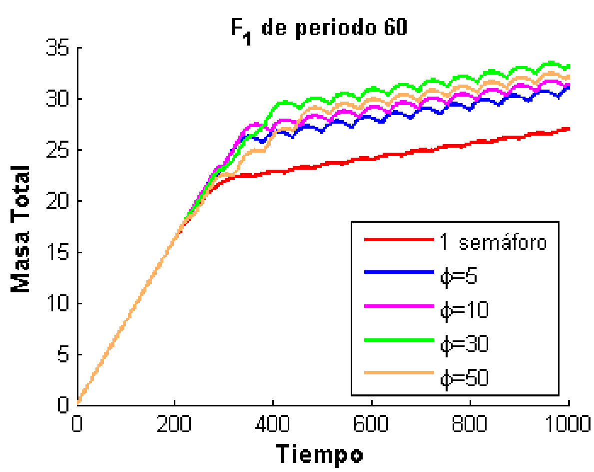


Figura 4.23: Tiempo de variación de la masa total para diferentes casos de ϕ.

En este capítulo se expuso la teoría necesaria para resolver leyes de conservación con restricción constante en el flujo, dependiente sólo del espacio. Los problemas se resolvieron de manera analítica y numérica.

Capítulo 5

Ley de Conservación con restricción no local

En este capítulo se estudia una ley de conservación con flujo restringido, definida a través de una restricción no local. Se resuelve el problema de manera analítica y numérica. En cuanto a las aplicaciones de este tipo de modelo, estas simulan la presencia de peatones en un corredor.

5.1. Modelo

En Andreianov, Donadello y Rosini [3], se estudia el problema de Cauchy para leyes de conservación con una restricción no local de la forma

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0, & t > 0, \ x \in \mathbb{R} \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \\ f(\rho(t,0)) \leq q(t), & t > 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

A diferencia del problema anterior, la restricción no es constante, por lo que se considera

$$q(t) = p\left(\int_{\mathbb{R}^-} \omega(x)\rho(t,x)dx\right).$$

Esta ley de conservación permite modelar el comportamiento de peatones en un corredor, cuya restricción simula la congestión que se presenta por la cantidad de peatones intentando salir por una puerta. En la ecuacion (5.1) $\rho \in [0,1]$ es la densidad promedio de peatones que se mueven en el corredor, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es el flujo peatonal con peatones moviéndose en dirección de x. $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ prescribe el flujo máximo permitido a través de una salida colocada en $x = 0$, $\omega : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ es la función de peso utilizada para la densidad promedio y $\rho_0 : \mathbb{R} \to [0,1]$ es la densidad de peatones inicial.

Observación 5.1.1. *En particular, se considerará*

$$p(\xi) = \begin{cases} p_1, & 0 \leq \xi < \xi_1 \\ p_2, & \xi_1 \leq \xi < \xi_2 \\ p_3, & \xi_2 \leq \xi < 1, \end{cases} \tag{5.2}$$

p se puede representar como en Figura 5.1, Figura 5.2 y Figura 5.3.

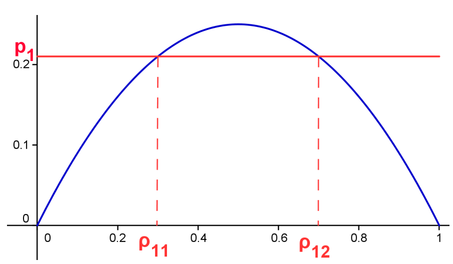


Figura 5.1: $f(\rho) \leq p_1 \Leftrightarrow \rho \leq \rho_{11} \wedge \rho \geq \rho_{12}$

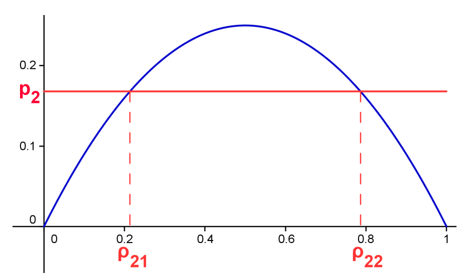


Figura 5.2: $f(\rho) \leq p_2 \Leftrightarrow \rho \leq \rho_{21} \wedge \rho \geq \rho_{22}$

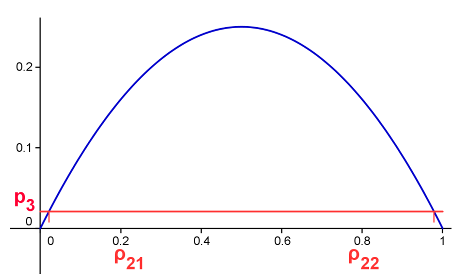


Figura 5.3: $f(\rho) \leq p_3 \Leftrightarrow \rho \leq \rho_{31} \wedge \rho \geq \rho_{32}$

con p_{11}*,* p_{12}*,* p_{21}*,* p_{22}*,* p_{31} *y* p_{32} *se definen de manera análoga a* $\hat{\rho}$ *y* $\check{\rho}$ *del capítulo anterior, con* $\rho_{i,j}$*,* $i \in \{1,2,3\}$ *y* $j \in \{1,2\}$*, soluciones de la ecuación* $f(\rho) = p(\xi)$*.*

Siguiendo [3] se plantea la siguiente definición de solución de entropía.

Definición 5.1.1. *Suponiendo que* $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+)$ *es una función creciente, que satisface* $||\omega||_{L^1(\mathbb{R}^-,\mathbb{R}^+)} = 1$*, y existe* $i_\omega > 0$ *tal que* $\omega(x) = 0$ *para cualquier* $x \leq -i_\omega$*. Una función* $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; [0,1]) \cap \mathbf{C}^0\left(\mathbb{R}^+; L^1_{loc}(\mathbb{R}; [0,1])\right)$ *es una solución de entropía-ADR del problema* (5.1) *si existe* $q \in L^\infty(\mathbb{R}^+; [0, f(\overline{\rho})])$ *tal que:*

- $\forall \varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^+)$*,* $\varphi \geq 0$ *función test, y* $\forall k \in [0, R]$

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(|\rho(t,x) - \kappa| \partial_t + \Phi(\rho(t,x), \kappa)\, \partial_x \right) \varphi(t,x)\ dx\ dt + \\ &\int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x) - \kappa|\, \varphi(0,x)\ dx + 2 \int_0^{+\infty} \left(1 - q(t)/f(\overline{\rho})\right)\ f(\kappa)\, \varphi(t,0)\ dt \geq 0\end{aligned} \tag{5.3}$$

- *Además,* q *está relacionada con* ρ *por la relación*

$$q(t) = p\left(\int_{\mathbb{R}^-} \omega(x)\rho(t,x)dx\right) \ \textit{para casi todo } t \in \mathbb{R}^+. \tag{5.4}$$

Para garantizar existencia y unicidad de la solución de (5.1), los autores plantean el siguiente teorema.

Teorema 5.1.1. *Suponiendo que* $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+)$ *es una función creciente, que satisface* $||\omega||_{L^1(\mathbb{R}^-,\mathbb{R}^+)} = 1$*, y existe* $i_\omega > 0$ *tal que* $\omega(x) = 0$ *para cualquier* $x \leq -i_\omega$*. Entonces para cualquier dato inicial* $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}; [0,R])$*, el problema* (5.1) *admite una única solución de entropía* ρ *en el sentido de la Definición 5.1.1.*

La prueba de este teorema se encuentra en [3], Teorema 1.

5.2. Esquema Numérico

Para dar solución al problema (5.1) usando esquemas numéricos nos basaremos en los propuesto por Andreianov, Donadello, Razafison y Rossini [2]. Para lo cual se considera la discretización espacial y temporal propuesta en la Sección 3.2, con la Definición 3.1.1, tal que en $x_{j_c+\frac{1}{2}}$ se encuentra la restricción.

El esquema a estudiar es de la forma

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \lambda \left[F^n_{j+\frac{1}{2}} - F^n_{j-\frac{1}{2}} \right], \tag{5.5}$$

donde $\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ y $F^n_{j+\frac{1}{2}}$ está dado por

$$F^n_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} h(\rho_j, \rho_{j+1}), & \text{si } j \neq j_c, \\ \text{mín}\{h(\rho_j, \rho_{j+1}), q^n\}, & \text{si } j = j_c, \end{cases} \tag{5.6}$$

siendo h el flujo numérico lipschitz continuo, consistente y monótono, considerado como (3.15) y

$$q^n = p\left(\Delta x \sum_{j \leq j_c} \omega(x_j) \rho_j^n \right). \tag{5.7}$$

Observación 5.2.1. *Considerando la solución aproximada por el esquema* (5.5)-(5.7) *como en* (3.6)*, y de forma análoga se defina la función de restricción aproximada*

$$q_\Delta(t) = q^n \quad \textit{para } t \in [t^n, t^{n+1}]. \tag{5.8}$$

Proposición 5.2.1. *Sea $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$ y $q_\Delta, \overline{q}_\Delta$ funciones constantes a trozos de la forma* (5.8)*. Si ρ^n y $\overline{\rho}^n$ son soluciones aproximadas de* (5.1) *correspondientes, respectivamente, a q_Δ y $\overline{q}_\Delta$ construídas aplicando el esquema* (5.5)-(5.7)*, entonces se tiene*

$$||\rho^n - \overline{\rho}^n||_{L^1([0,T]\times\mathbb{R})} \leq 2T||q_\Delta - \overline{q}_\Delta||_{L^1([0,T]\times\mathbb{R})}. \tag{5.9}$$

Demostración. Sea $N = \dfrac{T}{\Delta t}$ e introduciendo $\left(\tilde{\rho}_j^n\right)_{j\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\tilde{\rho}_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\tilde{F}^n_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^n_{j-\frac{1}{2}}\right], \qquad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \tag{5.10}$$

con $\tilde{F}^n_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), & j \neq j_c \\ \text{mín}\{h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n), \overline{q}^n, & j = j_c. \end{cases}$

Así, para cualquier $n = 1, ..., N$ se tiene que $\rho_j^n = \tilde{\rho}_j^n$ si $j \in \{j_c, j_c + 1\}$.

Luego,

$$\tilde{\rho}_{j_c}^n = \rho_{j_c}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\text{mín}\{h(\rho_{j_c}^{n-1}, \rho_{j_c+1}^n), \overline{q}^{n-1}\} - \text{mín}\{h(\rho_{j_c-1}^{n-1}, \rho_{j_c}^n), \overline{q}^{n-1}\}\right]. \tag{5.11}$$

$$\rho_{j_c}^n = \rho_{j_c}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\text{mín}\{h(\rho_{j_c}^{n-1}, \rho_{j_c+1}^n), q^{n-1}\} - \text{mín}\{h(\rho_{j_c-1}^{n-1}, \rho_{j_c}^n), q^{n-1}\}\right]. \tag{5.12}$$

Restando (5.11) a (5.12) se tiene

$$\rho_{j_c}^n - \tilde{\rho}_{j_c}^n = \frac{-\Delta t}{\Delta x}\left[\text{mín}\{h(\rho_{j_c}^{n-1}, \rho_{j_c+1}^n), q^{n-1}\} - \text{mín}\{h(\rho_{j_c}^{n-1}, \rho_{j_c+1}^n), \overline{q}^{n-1}\}\right].$$

De forma análoga se tiene

$$\rho_{j_c+1}^n - \tilde{\rho}_{j_c+1}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\text{mín}\{h(\rho_{j_c}^{n-1}, \rho_{j_c+1}^n), q^{n-1}\} - \text{mín}\{h(\rho_{j_c}^{n-1}, \rho_{j_c+1}^n), \overline{q}^{n-1}\}\right].$$

Así, $\quad |\rho_{j_c}^n - \tilde{\rho}_{j_c}^n| \leq \dfrac{\Delta t}{\Delta x}|q^{n-1} - \overline{q}^{n-1}| \quad$ y $\quad |\rho_{j_c+1}^n - \tilde{\rho}_{j_c+1}^n| \leq \dfrac{\Delta t}{\Delta x}|q^{n-1} - \overline{q}^{n-1}|$.

Por lo cual, para $n = 1, ..., N$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\rho_j^n - \tilde{\rho}_j^n| \leq 2\frac{\Delta t}{\Delta x}|q^{n-1} - \overline{q}^{n-1}|. \tag{5.13}$$

Además, la modificación del flujo en $x_{j_c+\frac{1}{2}}$ no afecta la monotonicidad del esquema, teniendo

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\tilde{\rho}_j^n - \overline{\rho_j}^n| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\rho_j^n - \overline{\rho_j}^n|. \tag{5.14}$$

Gracias a (5.13) y a (5.14) se tiene

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_j^1-\overline{\rho}_j^1| = \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_j^1-\tilde{\rho}_j^1+\tilde{\rho}_j^1-\overline{\rho}_j^1| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_j^1-\tilde{\rho}_j^1| + \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\tilde{\rho}_j^1-\overline{\rho}_j^1|$$
$$\leq 2\frac{\Delta t}{\Delta x}|q^0-\overline{q}^0| + \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_j^0-\overline{\rho}_j^0| = 2\frac{\Delta t}{\Delta x}|q^0-\overline{q}^0|.$$

Entonces,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_j^n-\overline{\rho}_j^n| \leq 2\frac{\Delta t}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1}|q^k-\overline{q}^k| \leq \frac{2}{\Delta x}||q_\Delta-\overline{q}_\Delta||_{L^1([0,t^n]\times\mathbb{R})}.$$

Finalmente,

$$||\rho^n-\overline{\rho}^n||_{L^1([0,T]\times\mathbb{R})} = \Delta t\Delta x\sum_{n=1}^{N}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho_j^n-\overline{\rho}_j^n| \leq \Delta t\Delta x\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{\Delta x}||q_\Delta-\overline{q}_\Delta||_{L^1([0,t^n]\times\mathbb{R})}\right)$$
$$= 2\Delta t||q_\Delta-\overline{q}_\Delta||_{L^1([0,t^n]\times\mathbb{R})}\sum_{n=1}^{N}(1) = 2T||q_\Delta-\overline{q}_\Delta||_{L^1([0,T]\times\mathbb{R})}.$$

□

La siguiente proposición es una variante de la propuesta en [3], ya que en este escrito $R = 1$.

Proposición 5.2.2 (Estimación L^∞)**.** *Sea q_Δ definido por* (5.7)-(5.8)*. Suponiendo que $\omega \in Lip(\mathbb{R}^-;\mathbb{R}^+)$. Entonces bajo la condición CFL $Lip(h)\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq \dfrac{1}{2}$, para cualquier $T > 0$, existe $C > 0$ que solo depende de T, f, h, p, ω y R tales que*

$$|q_\Delta|_{BV([0,T])} \leq C. \tag{5.15}$$

Demostración. Sea $N = \dfrac{T}{\Delta t}$ y j_ω un entero tal que $supp(\omega) \subset \bigcup_{j_\omega\leq j\leq j_c} c_j$. Entonces para $n = 0, ..., N-1$

$$
\begin{aligned}
|q^{n+1}-q^n| &= \left| p\left(\Delta x \sum_{j=j_\omega}^{j_c} \omega(x_j)\rho_j^{n+1}\right) - p\left(\Delta x \sum_{j=j_\omega}^{j_c} \omega(x_j)\rho_j^{n}\right)\right| \\
&\leq Lip(p)\left|\Delta x \sum_{j=j_\omega}^{j_c} \omega(x_j)(\rho_j^{n+1}-\rho_j^n)\right| \\
&= Lip(p)\,\Delta x \left|\sum_{j=j_\omega}^{j_c} \omega(x_j)\left(\rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n_{j+\frac{1}{2}} - F^n_{j-\frac{1}{2}}\right] - \rho_j^n\right)\right| \\
&= Lip(p)\,\Delta t \left|\sum_{j=j_\omega}^{j_c} \omega(x_j)\left(F^n_{j+\frac{1}{2}} - F^n_{j-\frac{1}{2}}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Además, usando una suma por parte, se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=j_\omega}^{j_c} \omega(x_j)\left(F^n_{j+\frac{1}{2}} - F^n_{j-\frac{1}{2}}\right) =& \omega(x_{j_c})F_{j_c+\frac{1}{2}} - \omega(x_{j_\omega})F_{j_\omega-\frac{1}{2}} \\
& - \sum_{j=j_\omega}^{j_c-1} \left(\omega(x_j+1)-\omega(x_j)\right) F^n_{j+\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

y como $\omega \in Lip(\mathbb{R}^-;\mathbb{R}^+)$

$$
\sum_{j=j_\omega}^{j_c} \omega(x_j)\left(F^n_{j+\frac{1}{2}} - F^n_{j-\frac{1}{2}}\right) \leq ||\omega||_{L^\infty(\mathbb{R}^-;\mathbb{R}^+)}\left(|F^n_{j_c+\frac{1}{2}}| + |F^n_{j_c-\frac{1}{2}}|\right) + \Delta x\, Lip(\omega) \sum_{j=j_\omega}^{j_c} |F^n_{j+\frac{1}{2}}|.
$$

Luego de (5.6), para $j \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
|F^n_{j+\frac{1}{2}}| = |h(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n)| &\leq |h(\rho_j^n,\rho_{j+1}^n) - h(\rho_j^n,\rho_j^n)| + |f(\rho_j^n)| \\
&\leq Lip(h)|\rho_{j+1}-\rho_j| + Lip(f)|\rho_j^n| \leq Lip(h) + Lip(f).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
|q_\Delta|_{BV([0,T])} = \sum_{n=0}^{N-1} |q^{n+1}-q^n| \leq C,
$$

donde $C = T\,Lip(p)\,(Lip(h) + Lip(f))\,\big(2||\omega||_{L^\infty(\mathbb{R}^-;\mathbb{R}^+)} + \Delta x\,Lip(\omega)(j_c - j_\omega)\big)$. $\square$

Teorema 5.2.1. *Bajo la condición CFL* $Lip(h)\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq \dfrac{1}{2}$ *y si* $\omega \in Lip(\mathbb{R}^-;\mathbb{R}^+)$, *el esquema de volúmenes finitos restringido* (5.5)-(5.6)-(5.7) *converge en* $L^1([0,T]\times\mathbb{R})$ *a la única solución de entropía de* (5.1).

La demostración de este teorema se encuentra en [3], Teorema 2.1. En la cual se utilizan el Lema de Helly y las proposiciones anteriores.

5.3. Resultados numéricos y aplicaciones

En esta sección se resolverán de manera numérica algunos ejemplos, comparándolos con su solución analítica. Para resolverlos se utiliza, en una primera instancia el esquema de primer orden (5.5)-(5.7) con flujo Godunov y como esquema de segundo orden al esquema modificado en la Sección 4.3 utilizando el método Runge-Kutta con flux limiter minmod y flujo Godunov.

Ejemplo 20. *En [3] se plantea el problema dando las indicaciones para obtener su solución analítica. Por lo cual, este ejemplo se ocupará para validar el esquema de orden 2 modificado, ya que con el mismo se validó el esquema propuesto en [2] usando un esquema de orden 1.*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\ \rho(0,x) = \chi_{[-5.75,-2]} \\ q(t) = p\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^-} \omega(x)\rho(t,x)dx\right) \\ \omega(x) = 2(x+1)\chi_{[-1,0]} \\ p(\xi) = \begin{cases} 0.21, & 0 \leq \xi < 0.566 \\ 0.168, & 0.566 \leq \xi < 0.731 \\ 0.021, & 0.731 \leq \xi < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Este tipo de problema simula la evacuación de un corredor a través de una salida colocada en $x = 0$.

Considerando la Observación 5.1.1 se tiene $p_{11} = 0.3$, $p_{12} = 0.7$, $p_{21} = \dfrac{1-\sqrt{0.328}}{2}$, $p_{22} = \dfrac{1+\sqrt{0.328}}{2}$, $p_{31} = \dfrac{1-\sqrt{0.916}}{2}$ *y* $p_{32} = \dfrac{1+\sqrt{0.916}}{2}$.

Cuya solución analítica se esboza en la Figura 5.4.

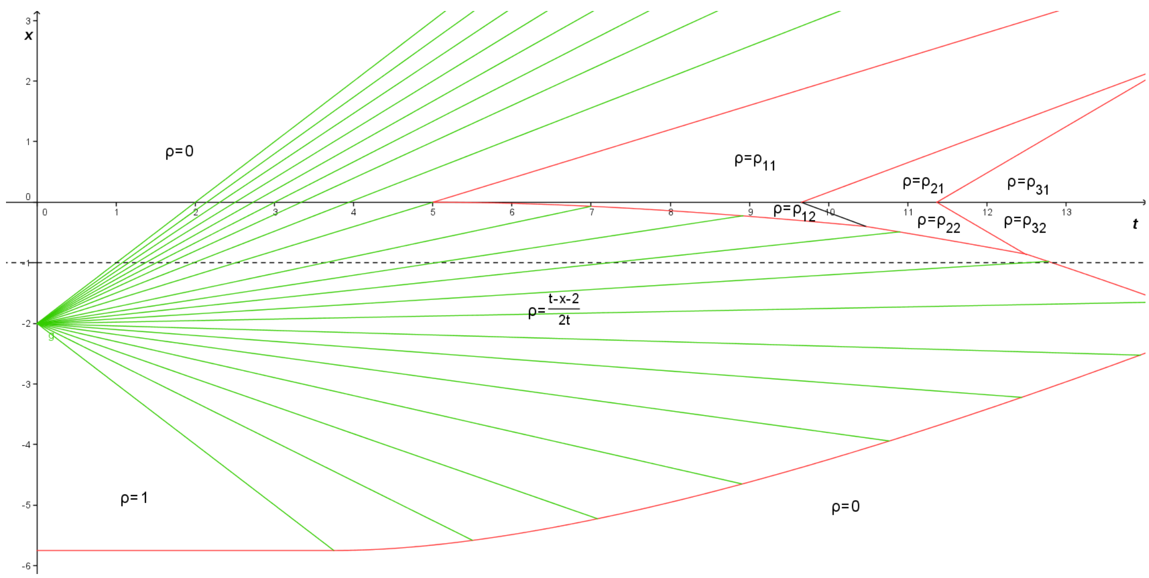
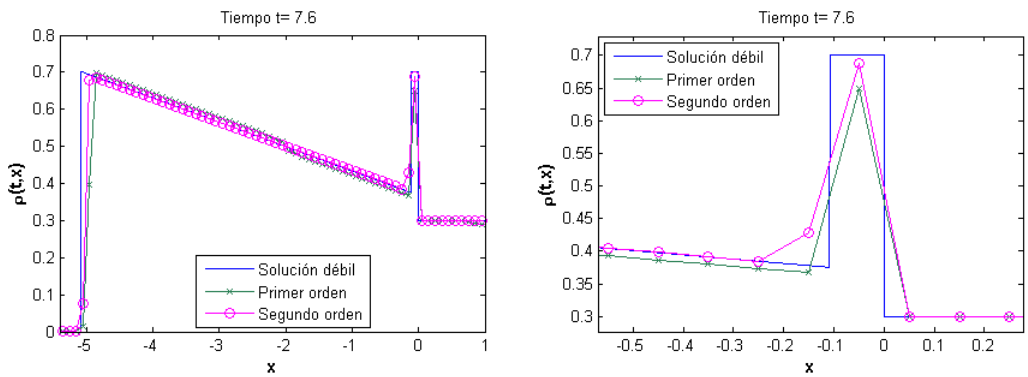


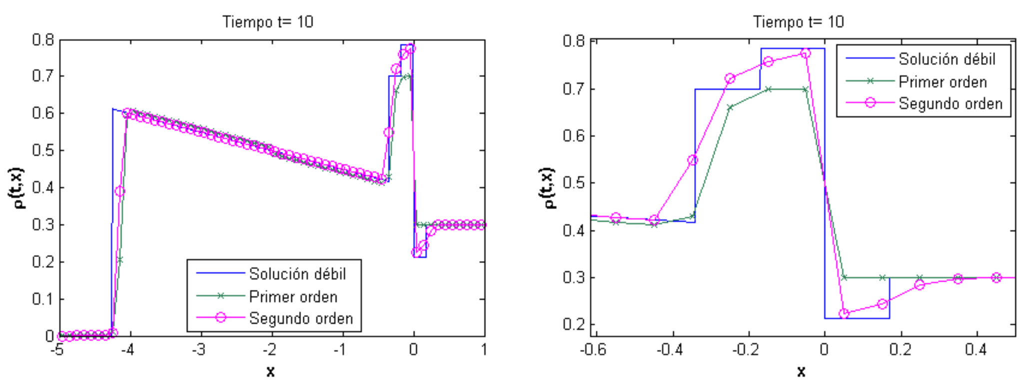
Figura 5.4: Solución del problema

En las Figuras 5.5(a) y 5.6(a) se comparan las soluciones numéricas obtenidas de los dos esquemas numéricos respecto de la solución débil calculada, con $\Delta x = \frac{1}{100}$. *En la segunda figura se aprecia que el esquema de primer orden no logra capturar un choque, a diferencia del esquema de segundo orden modificado que si lo captura, por lo cual esquema de segundo orden modificado aproxima mejor la solución débil del problema.*



(a) (b)

Figura 5.5: (a) Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y solución débil en el tiempo $t = 7.6$.(b) Zoom a choques de lado derecho.



(a) (b)

Figura 5.6: (a) Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y solución débil en el tiempo $t = 10$. (b) Zoom a choques de lado derecho.

En la siguiente tabla se tabulan los errores de aproximación y razón de convergencia de cada esquema, mostrando que el esquema de segundo orden modificado produce menor error en comparación con el esquema de primer orden.

Número de celdas	*Primer Orden*		*Segundo Orden Modificado*	
	L^1*-error*	*Convergencia* L^1	L^1*-error*	*Convergencia* L^1
100	$1.62E-02$	-	$6.40E-03$	-
200	$7.89E-03$	$1.04e+00$	$1.44E-03$	$2.15E+00$
400	$4.45E-03$	$8.24E-01$	$7.40E-04$	$9.64E-01$
800	$2.47E-03$	$8.50E-01$	$4.36E-04$	$7.64E-01$
1600	$1.37E-03$	$8.53E0-1$	$2.71E-04$	$6.86E-01$
3200	$7.59E-04$	$8.47E-01$	$1.74E-04$	$6.34E-01$

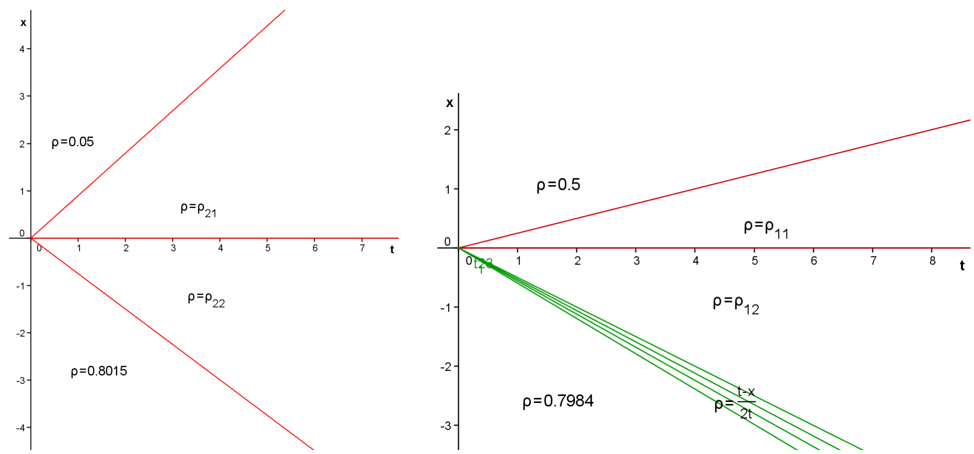
Ejemplo 21. *En el siguiente ejemplo se realiza una comparación entre dos datos iniciales.*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\ \rho_1(0,x) = \begin{cases} 0.8015, & x<0 \\ 0.5, & x>0 \end{cases} \qquad y \qquad \rho_2(0,x) = \begin{cases} 0.7984, & x<0 \\ 0.5, & x>0 \end{cases} \\ q(t) = p\left(\int_{\mathbb{R}^-} \omega(x)\rho(t,x)dx\right) \\ \omega(x) = 2(x+1)\chi_{[-1,0]} \\ p(\xi) = \begin{cases} 0.1875, & 0 \le \xi \le 0.8 \\ 0.05, & 0.8 < \xi \le 1. \end{cases} \end{cases}$$

Este problema simula la evacuación de un corredor a través de una salida colocada en $x=0$*, con dos densidades iniciales de peatones distintas.*

Para la primera condición inicial $\rho_1(0,x)$ *se observa que la densidad de peatones inicial sobrepasa la primera concentración de* ξ *por lo cual actúa inmediatamente la segunda restricción, a diferencial de la segunda condición inicial* $\rho_2(0,x)$ *para la cual la densidad de peatones inicial permanece en la primera concentración actuando en el tiempo* $t=1$ *la primera restricción.*

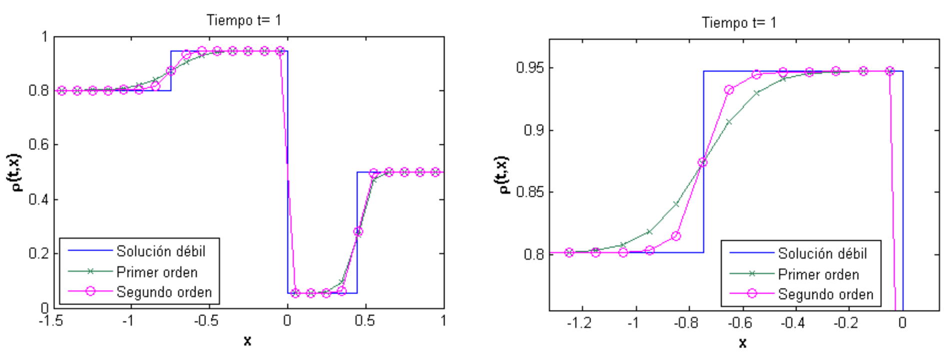
La solución a los problemas con $\rho_1(0,x)$ *y* $\rho_2(0,x)$ *se esbozan en Figura 5.7(a) y 5.7(b), respectivamente.*



(a) (b)

Figura 5.7: (a) Solución al problema con $\rho_1(0,x)$. (b) Solución al problema con $\rho_2(0,x)$.

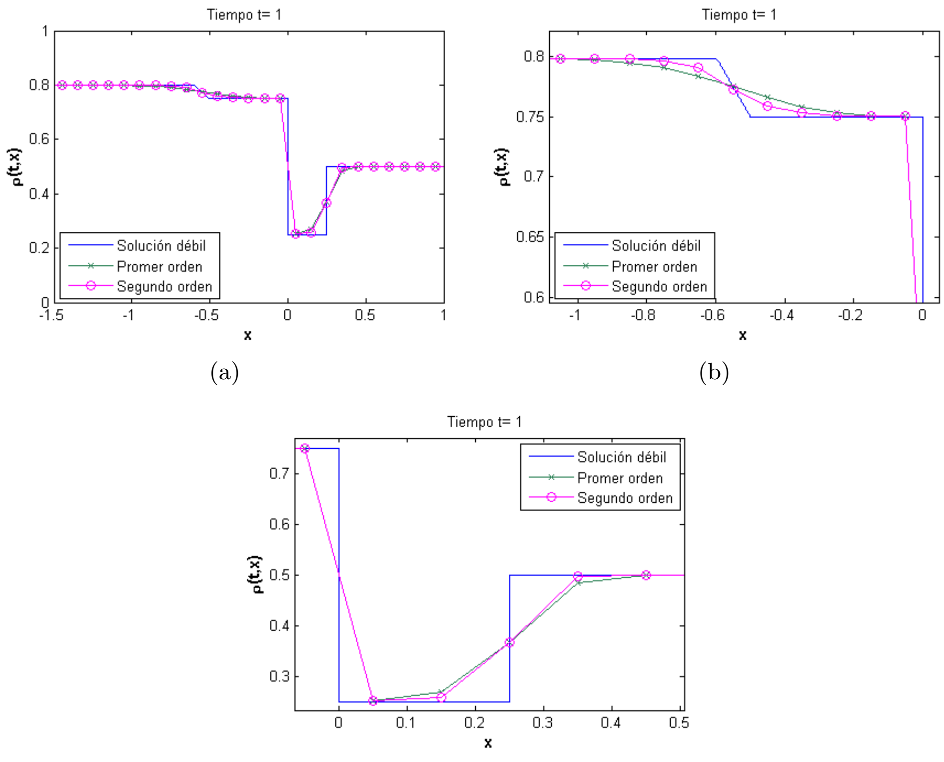
En la Figura 5.8(a) se comparan las soluciones numéricas obtenidas con dos esquemas numéricos respecto de cada solución débil calculada para $\rho_1(0,x)$, con $\Delta x = \frac{1}{100}$, la Figura 5.8(b) es un zoom de la anterior y se observa que el esquema de segundo orden aproxima mejor la solución débil del problema.



(a) (b)

Figura 5.8: (a) Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y solución débil en el tiempo $t = 1$ para $\rho_1(0,x)$. (b) Zoom primer y segundo choque, de izquierda a derecha.

En la Figura 5.9(a) se comparan las soluciones numéricas obtenidas con dos esquemas numéricos respecto de cada solución débil calculada para $\rho_2(0,x)$, con $\Delta x = \frac{1}{100}$, las Figuras 5.9(b) y 5.9(c) son un zoom de la anterior y se observa que, al igual que en el problema *anterior, el esquema de segundo orden aproxima mejor la solución débil del problema.*



(a) (b)

(c)

Figura 5.9: (a) Comparación esquemas de primer y segundo orden modificado (100 celdas) y solución débil en el tiempo $t = 1$ para $\rho_2(0, x)$, de izquierda a derecha. (b) Zoom rarefacción. (c) Zoom primer y segundo choque, de izquierda a derecha.

En este capítulo se expuso la teoría necesaria para resolver leyes de conservación con una restricción no local en el flujo. Los problemas presentados se resolvieron de manera analítica y numérica.

Capítulo 6

Ley de conservación con acoplamiento EDO-EDP

Se estudió de forma analítica una ley de conservación con una restricción movible, representada por un bus que se desplaza a lo largo de una vía, afectando la densidad del tráfico a medida que éste se va desplazando, basado en el modelo propuesto por Delle Monache y Goatin [13].

6.1. Modelo

El propósito es describir matemáticamente el fenómeno causado por la presencia de un bus de una carretera. Debido que hasta ahora los problemas propuestos no consideran la presencia de un solo vehículo, es que se considera al bus como un obstáculo móvil; puesto que el bus no se comporta igual que los demás vehículos no es posible considerarlo en la ley de conservación (2.2).

La velocidad del bus $\omega(\rho)$ es constante hasta que se ve afectado por la alta densidad del tráfico a su alrededor, en este caso el bus lleva su propia velocidad máxima V_b, o en el caso de que tráfico sea denso el bus debe adoptar la velocidad de los demás vehículos $v(\rho)$, resultando la velocidad del bus como

$$\omega(\rho) = \begin{cases} V_b\,, & \text{si } \rho \leq \rho^* = (1 - V_b) \\ v(\rho)\,, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{6.1}$$

y la trayectoria del bus se obtiene de resolver la EDO

$$\dot{y}(t) = \omega(\rho(y, y(t)+))). \tag{6.2}$$

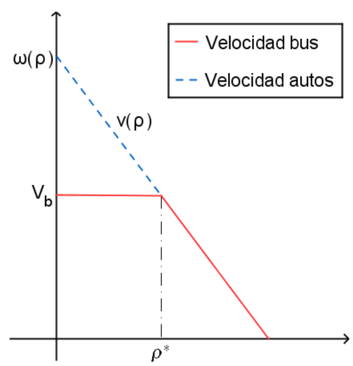


Figura 6.1: Representación de las velocidades del bus y de los autos.

Para describir la influencia del bus en la carretera se estudia el problema en el marco de referencia del bus, es decir, se considera $X = x - y(t)$, sistema en el cual la velocidad del bus es nula, ver [12]. Reescribiendo la ley de conservación se tiene

$$\partial_t \rho + \partial_X (f(\rho) - \dot{y}\rho) = 0. \tag{6.3}$$

Considerando solo el flujo de (6.3) y para describir la reducción de la capacidad de la carretera debido a la presencia del bus se plantea

$$f(\rho(t, y(t))) - \dot{y}(t)\rho(y, y(t)) \leq f_\alpha(\rho_\alpha) - \dot{y}\rho_\alpha \tag{6.4}$$

donde el coeficiente constante $\alpha \in]0, 1[$ es la tasa de reducción de la capacidad de la carretera debido a la presencia del bus. Con $f_\alpha : [0,\alpha] \to \mathbb{R}^+$ la función de flujo restringida que describe el flujo reducido en $x = y(t)$, es decir, $f_\alpha(\rho) = \rho\left(1 - \frac{\rho}{\alpha}\right)$ y $\rho_\alpha \in]0, \frac{\alpha}{2}[$ tal que $f'_\alpha(\rho_\alpha) = \dot{y}$, es decir, $\rho_\alpha = \frac{\alpha}{2}(1-\dot{y})$.

Luego,

$$\begin{aligned} f_\alpha(\rho_\alpha) - \dot{y}\rho_\alpha &= \rho_\alpha\left(1 - \tfrac{\rho_\alpha}{\alpha}\right) - \dot{y}\rho_\alpha = \tfrac{\alpha}{2}(1-\dot{y})\left(1 - \tfrac{\frac{\alpha}{2}(1-\dot{y})}{\alpha}\right) - \dot{y}\tfrac{\alpha}{2}(1-\dot{y}) \\ &= \tfrac{\alpha}{2}(1-\dot{y})\left(1 - \tfrac{1}{2}(1-\dot{y}) - \dot{y}\right) = \tfrac{\alpha}{2}(1-\dot{y})\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\dot{y}}{2}\right) = \tfrac{\alpha}{4}(1-\dot{y})^2. \end{aligned}$$

Así,

$$f(\rho(t, y(y))) - \dot{y}(t)\rho(y, y(t)) \leq \frac{\alpha}{4}(1 - \dot{y}(t))^2. \tag{6.5}$$

Convirtiéndose el modelo en

$$\begin{cases} \rho_t + f(\rho)_x = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ f(\rho(t,y(t))) - \dot{y}\rho(t,y(t)) \leq F_\alpha = \dfrac{\alpha}{4}(1-\dot{y}(t))^2 & t \in \mathbb{R}^+ \\ \dot{y}(t) = \omega(\rho(t, y(t)+)) & t \in \mathbb{R}^+ \\ y(0) = y_0 & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{6.6}$$

Observación 6.1.1. *De forma análoga a la Observación 4.1.2, la solución al problema (6.6) se denotará como $\mathcal{R}^\alpha(\rho_l, \rho_r)(x/t)$, es decir,*

$$\rho(t,x) = \mathcal{R}^\alpha(\rho_l, \rho_r)(x/t).$$

Teniendo presente los puntos $\check{\rho}_\alpha$ y $\hat{\rho}_\alpha$, con $\check{\rho}_\alpha \leq \hat{\rho}_\alpha$, los cuales son los puntos de intersección del flujo $f(\rho)$ con la recta $y(\rho) = V_b\rho - V_b\rho_\alpha + f_\alpha(\rho_\alpha)$, se realiza la siguiente definición.

Definición 6.1.1. *El solucionador de Riemann restringido $\mathcal{R}^\alpha[0,1]^2 \to L^1_{loc}(\mathbb{R};[0,1])$, para (6.6) y (2.4) se define como*

1. *Si* $f(\mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(V_b)) > F_\alpha + V_b\mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(V_b)$, *entonces*

$$\mathcal{R}^\alpha(\rho_l,\rho_r)(x/t) = \begin{cases} \mathcal{R}(\rho_l,\hat{\rho}_\alpha)(x/t) & si\ x < V_b t, \\ \mathcal{R}(\check{\rho}_\alpha,\rho_r)(x/t) & si\ x \geq V_b t, \end{cases} \qquad y \qquad y(t) = V_b t$$

2. *Si* $V_b\mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(V_b) \leq f(\mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(V_b)) \leq F_\alpha + V_b\mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(V_b)$, *entonces*

$$\mathcal{R}^\alpha(\rho_l,\rho_r)(x/t) = \mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(x/t) \qquad y \qquad y(t) = V_b t$$

3. *Si* $f(\mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(V_b)) < V_b\mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(V_b)$, *entonces*

$$\mathcal{R}^\alpha(\rho_l,\rho_r)(x/t) = \mathcal{R}(\rho_l,\rho_r)(x/t) \qquad y \qquad y(t) = v(\rho_r)t$$

Observación 6.1.2. *En particular, se observa que cuando la restricción es forzada (punto 1 de la definición anterior), surge un choque no clásico, el cual satisface la condición de entropía de Liu pero viola la condición de entropía de Lax, ver Observación 4.1.1.*

La siguiente definición plantea la existencia de la solución del problema (6.6).

Definición 6.1.2. *Una par* $(\rho, y) \in C^0(\mathbb{R}^+, L^1 \cap BV(\mathbb{R};[0,1])) \times W^{1,1}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R})$ *es una solución a* (6.6) *si*

1. ρ *es una solución débil de la ley de conservación, es decir,* $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} (\rho\partial_t\varphi + f(\rho)\partial_x\varphi)\ dx\ dt\ + \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x)\varphi(0,x)\,dx = 0$$

Más aún, ρ *satisface la condición de entropía de Kruzkov sobre* $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \setminus \{(t, y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$, *es decir, para cada* $\kappa \in [0,1]$ *y* $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+)$ *y* $\varphi(t, y(t)) = 0$, $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} (|\rho-\kappa|\partial_t\varphi + sgn(\rho-\kappa)\,(f(\rho)-f(\kappa))\,\partial_x\varphi)\ dx\ dt + \int_{\mathbb{R}} |\rho-\kappa|\varphi(0,x)\,dx \geq 0$$

2. *y es una solución Caratheódory de la EDO, es decir, para casi todo* $t \in \mathbb{R}^+$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \omega(\rho(s, y(s)+))\, ds$$

3. *La restricción se cumple en el sentido que para casi todo* $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to y(t)^\pm} (f(\rho) - \omega(\rho)\rho)\,(t, x) \leq F_\alpha$$

La existencia de solución del problema (6.6) en el sentido de la Definición 6.1.2 fue propuesta en [12] a partir del siguiente teorema.

Teorema 6.1.1. *Sea* $\rho_0 \in BV(\mathbb{R}; [0,1]$*, entonces el problema de Cauchy (6.6) admite una solución en el sentido de la Definición 6.1.2.*

La prueba de este teorema se encuentra en [13], teorema 1, el cual se realiza empleando el método front traking.

Ejemplo 22. *Considerando el problema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\ \rho(0,x) = \begin{cases} \hat{\rho}_\alpha & x < 0.5 \\ \check{\rho}_\alpha & x > 0.5 \end{cases} \\ f(\rho(t, y(t))) - \dot{y}\rho(t, y(t)) \leq F_\alpha \\ \dot{y} = \omega(\rho(t, y(t))) \\ y(0) = 0.5, \end{cases}$$

y $V_b = 0.3$*,* $\alpha = 0.6$*.*

En la Figura 6.2 se bosqueja el problema, con $\rho_\alpha = 0.21$*,* $\rho^* = 0.7$*,* $\check{\rho}_\alpha$ *y* $\hat{\rho}_\alpha$ *satisfacen la ecuación* $f(\rho) = 0.3\rho + 0.0735$*, con* $\check{\rho}_\alpha = \dfrac{0.7 - \sqrt{0.196}}{2}$ *y* $\hat{\rho}_\alpha = \dfrac{0.7 + \sqrt{0.196}}{2}$*.*

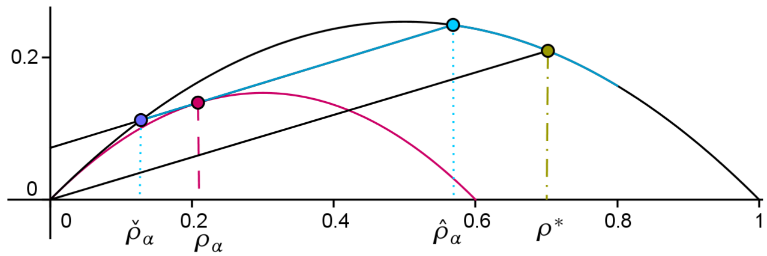


Figura 6.2: Representación del flujo con la restricción $\alpha = 0.6$ en $[0, 1]$

Basándose en la Definición 6.1.1 se produce sólo un choque entrópico con velocidad $s = 1 - \hat{\rho}_\alpha - \check{\rho}_\alpha = 0.3.$

Así, la solución del problema 22 está dada por

$$\rho(t,x) = \begin{cases} \hat{\rho}_\alpha & x < st + 0.5 \\ \check{\rho}_\alpha & x > st + 0.5 \end{cases}$$

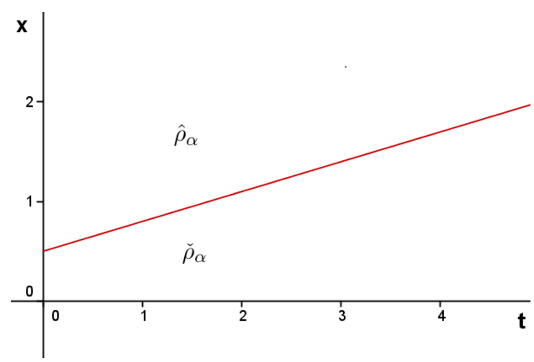


Figura 6.3: Solución del problema.

Posición del bus $y(t) = 0.3t + 0.5$

Ejemplo 23. *Considerando el problema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.4 & x < 0.5 \\ 0.5 & x > 0.5 \end{cases} \\ f(\rho(t,y(t))) - \dot{y}\rho(t,y(t)) \leq F_\alpha \\ \dot{y} = \omega(\rho(t,y(t))) \\ y(0) = 0.5, \end{cases}$$

y $V_b = 0.3$, $\alpha = 0.6$.

En la Figura 6.4 se bosqueja el problema, con $\rho_\alpha = 0.21$, $\rho^* = 0.7$, $\check{\rho}_\alpha$ *y* $\hat{\rho}_\alpha$ *satisfacen la ecuación* $f(\rho) = 0.3\rho + 0.0735$, *con* $\check{\rho}_\alpha = \dfrac{0.7 - \sqrt{0.196}}{2}$ *y* $\hat{\rho}_\alpha = \dfrac{0.7 + \sqrt{0.196}}{2}$.

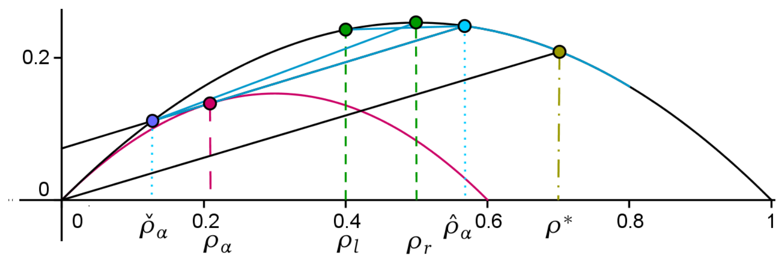


Figura 6.4: Representación del flujo con la restricción $\alpha = 0.6$ en $[0, 1]$

Basándose en la Definición 6.1.1, se da lugar a tres nuevos problemas:

- $\mathcal{R}(0.4, \hat{\rho}_\alpha)$, *lo que da origen a un choque entrópico con velocidad* $s_1 = 1 - 0.4 - \hat{\rho}_\alpha$,
- $\mathcal{R}(\hat{\rho}_\alpha, \check{\rho}_\alpha)$, *lo que da origen a un choque no clásico con velocidad* $s_2 = 1 - \hat{\rho}_\alpha - \check{\rho}_\alpha = 0.3$,
- $\mathcal{R}(\check{\rho}_\alpha, 0.5)$, *lo que da origen a un choque entrópico con velocidad* $s_3 = 1 - \check{\rho}_\alpha - 0.5$.

Así, la solución del problema 23 está dada por

$$\rho(t,x) = \begin{cases} 0.4 & x < s_1 t + 0.5 \\ \hat{\rho}_\alpha & s_1 t + 0.5 < x < s_2 t + 0.5 \\ \check{\rho}_\alpha & s_2 + 0.5 < x < s_3 t + 0.5 \\ 0.5 & x > s_3 t + 0.5. \end{cases}$$

Posición del bus $y(t) = 0.3t + 0.5$

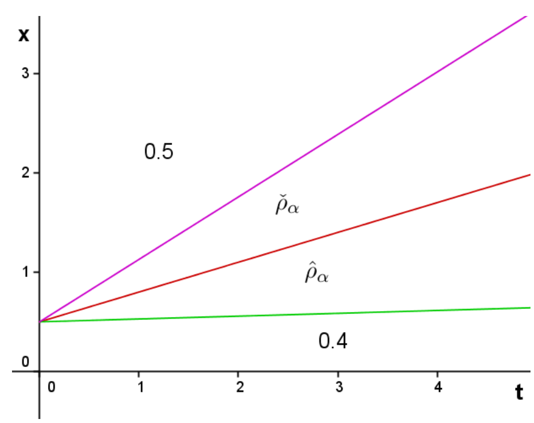


Figura 6.5: Solución del problema.

Ejemplo 24. *Considerando el problema*

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \\ \rho(0,x) = \begin{cases} 0.8 & x < 0.5 \\ 0.5 & x > 0.5 \end{cases} \\ f(\rho(t,y(t))) - \dot{y}\rho(t,y(t)) \leq F_\alpha \\ \dot{y} = \omega(\rho(t,y(t))) \\ y(0) = 0.5, \end{cases}$$

y $V_b = 0.3$, $\alpha = 0.6$.

En la Figura 6.6 se bosqueja el problema, con $\rho_\alpha = 0.21$, $\rho^* = 0.7$, $\check{\rho}_\alpha$ *y* $\hat{\rho}_\alpha$ *satisfacen la ecuación* $f(\rho) = 0.3\rho + 0.0735$, *con* $\check{\rho}_\alpha = \dfrac{0.7 - \sqrt{0.196}}{2}$ *y* $\hat{\rho}_\alpha = \dfrac{0.7 + \sqrt{0.196}}{2}$.

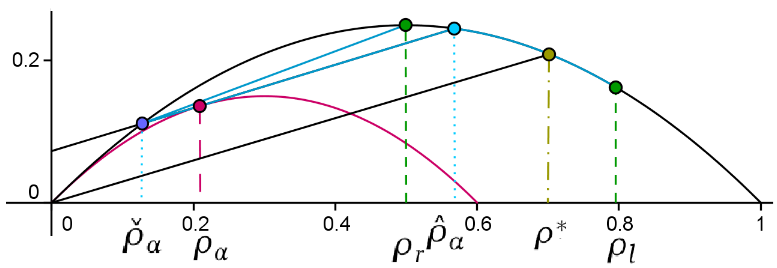


Figura 6.6: Representación del flujo con la restricción $\alpha = 0.6$ en $[0, 1]$

Basándose en la Definición 6.1.1, se da lugar a tres nuevos problemas:

- $\mathcal{R}(0.8, \hat{\rho}_\alpha)$, *dando origen a una rarefacción,*
- $\mathcal{R}(\hat{\rho}_\alpha, \check{\rho}_\alpha)$, *dando origen a un choque no clásico con velocidad* $s_1 = 1 - \hat{\rho}_\alpha - \check{\rho}_\alpha = 0.3$,
- $\mathcal{R}(\check{\rho}_\alpha, 0.5)$, *dando origen a un choque entrópico con velocidad* $s_2 = 1 - \check{\rho}_\alpha - 0.5$.

Así, la solución del problema 24 está dada por

$$\rho(t,x) = \begin{cases} 0.8 & x < -0.6t + 0.5 \\ \dfrac{t-x+0.5}{2t} & -0.6t+0.5 < x < (1-2\hat{\rho}_\alpha)t + 0.5 \\ \hat{\rho}_\alpha & (1-2\hat{\rho}_\alpha)t + 0.5 < x < s_1 t + 0.5 \\ \check{\rho}_\alpha & s_1 t + 0.5 < x < s_2 t + 0.5 \\ 0.5 & x > s_2 t + 0.5. \end{cases}$$

Posición del bus $y(t) = 0.3t + 0.5$

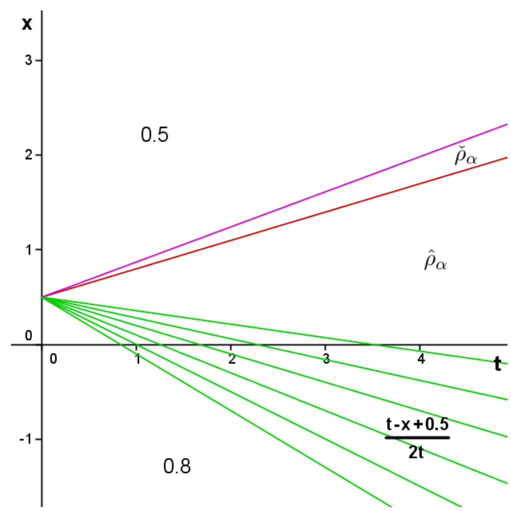


Figura 6.7: Solución del problema.

En este capítulo se expuso la teoría necesaria para resolver leyes de conservación con acoplamiento EDO-EDP, resolviendo problemas sólo de manera analítica. Quedando pendiente la aproximación numérica para este tipo de problema.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se realizó un repaso a la teoría básica para leyes de conservación y para métodos de volúmenes finitos. En particular nos enfocamos en leyes de conservación con flujo restringido.

Se consideró primero una ley de conservación con un flujo con una restricción constante en espacio para el cual se propusieron y resolvieron problemas de forma analítica y numérica; proponiendo una mejora al esquema de orden 2 con lo que se logró realizar una mejor aproximación de la solución débil de los problemas, sin embargo, esta modificación considera que en la celda donde se produce el choque no clásico la reconstrucción realizada se comporta constante, por tanto en ella actúa como un esquema de primer orden. Además, se modelaron situaciones donde intervienen semáforos sincronizados, analizando el caso óptimo para que actúen diversos semáforos.

Luego se consideró una ley de conservación con restricción no local, el cual permite describir el comportamiento de peatones en embotellamientos causados por la presencia de una puerta u otro obstáculo. Este tipo de problema se resolvió de forma analítica y numérica, corroborando que el esquema de orden 2 modificado aproxima mejor a la solución débil.

Adicionalmente, se estudió una ley de conservación con acoplamiento EDO-EDP, simulando la presencia de un vehículo lento en el tráfico por carretera produciendo congestionamiento. Este tipo de problema se resolvió de forma analítica, quedando como trabajo futuro resolverlo de forma numérica, además de proponer un esquema de alto orden para su solución.

Bibliografía

[1] B. Andreianov, P. Goatin and N. Seguin, *Finite volume schemes for locally constrained conservation laws.* Numerische Mathematatik, vol. 115, págs. 609-645 (2010).

[2] B. Andreianov, C. Donadello, U. Razafison and M. Rosini, *Qualitative behaviour and numerical approximation of solutions to conservation laws with non-local point constraints on the flux and modeling of crowd dynamics at the bottlenecks M2AS Math. Modelling and Numerical Analysis*, vol. 50, págs. 1269-1287, 2016.

[3] B. Andreianov, C. Donadello y M. Rosini, *Crowd dynamic and conservation laws with non-local constraints*, *M3AS Math. Methods Models Appl. Sci.*, vol. 24, no 13, págs. 2685-2722, 2014.

[4] B. Boutin, C. Chalons, F. Lagoutière and P. LeFloch, *Convergente and conservative schemes for nonclassical solutions based on kinetic relations. I.*

[5] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem.* Oxford University Press (2000).

[6] R. Bürger, *Introducción a leyes de conservación.* Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática (2013).

[7] R. Bürger, M. Bustos and F. Concha, *Settling velocities of particulate systems: 9. Phenomenological theory of sedimentation processes: numerical simulation of the transient behaviour of flocculated suspensions in an ideal batch or continuous thickener.* International Journal of mineral processing, vol. 55, págs. 267-282 (1999).

[8] R. Bürger, A. Garcia, K. Karlsen and J. Towers, *A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux* (2007)

[9] C. Chalons, P. Goatin and N. Seguin, *General constrained conservation laws. Application to pedestrian flow modeling.* NETWORKS AND HETEROGENEOUS MEDIA, vol. 8, no 2, págs. 433-463 (2013).

[10] C. Chalons, M. Delle and P.Goatin, *A conservative scheme for non-classical solutions to a strongly coupled PDE-ODE problem.* HAL (2014).

[11] R. Colombo and P. Goatin, *A well posed conservation law with a variable unilateral.* ScienceDirect, págs. 654-675 (2006).

[12] M. L. Delle Monache, *Modeling of moving bottlenecks in traffic flow: A PDE-ODE model with moving density.* ESAIM: Proceedings and Surveys, vol. 45, págs. 656-666 (2014).

[13] M. L. Delle Monache and P. Goatin, *Scalar conservation laws with moving constraints arising in traffic flow modeling: an existence result.* Journal of Differential Equations, vol. 257, págs. 4015-4029 (2014).

[14] M. Garavello and B. Piccoli, *Traffic flow on networks.* AIMS Series on Applied Mathematics, vol. 1 (2006).

[15] E. Godlewski and P. Raviart, *Hyperbolic system of conservation laws.* Ellipses (1991).

[16] B. Greenshiels, *A study of traffic capacity.* Proceedings of the Haghway Research Board, vol. 14, págs. 448-477 (1935).

[17] A. Harten, *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws.* Journal of computational Physics, vol. 49, págs. 357-393 (1983).

[18] H. Holden and N. Risebro, *Front tracking for hyperbolic conservation laws.* AIMS Series on Applied Mathematics, vol. 152 (2002).

[19] S. Kruzkov, *First order quasilinear equations in several independient variables.* MATH USSR SB, vol. 10, no 2, págs. 217-243 (1970).

[20] P. LeFloch, *Hyperbolic systems of conservation laws.* Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin (2002).

[21] R. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems.* Cambridge university Press (2002).

[22] R. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws. Second edition.* Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin (1992).

[23] M. Lighthill and G. Whitham, *On kinetic waves. II. Theory of traffic flows on long crowded roads.* Proc. Roy. Soc. London Ser. A, vol. 229, págs. 317-345 (1955).

[24] S. Mochon, *An analysis of the traffic on highways with changing surface conditions.* Math Modelling, vol. 9, no 1, págs. 1-11 (1987).

[25] P. Richards, *Shock waves on the highway.* Operation Research, vol. 4, págs. 42-51 (1956).

[26] N. Seguin and J. Vovelle, *Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients.* Math. Models Methods Appl. Sci., vol. 13, no 2, págs. 221-257 (2003).

[27] J. Towers, *Convergence of a Difference Scheme for Conservation Laws with a Discontinuous Flux.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 38, no 2, págs. 681-698 (2000).

[28] M. Treiber and A. Kesting, *Traffic Flow Dynamics. Data, Models and Simulation.* Springer (2013).

[29] Y. Sugiyama, M. Fukui, M. Kikuchi, K. Hasebe, A. Nakayama, K. Nishinari, S. Tadaki and S. Yukawa, *Traffic jams without bottlenecks - experimental evidence*

for the physical mechanism of the formation of a jam. New Journal of Physics, vol.10 (2008).