UNIVERSIDAD DEL BÍO BÍO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CONVERGENCIA DE UN ESQUEMA IMPLÍCITO-EXPLÍCITO PARA UN SISTEMA MIXTO PARABÓLICO-HIPERBÓLICO EN DOS DIMENSIONES

Tesis para optar al grado de Magíster en Matemática Mención Matemática Aplicada

PROFESOR GUÍA :

Dr. Luis Miguel Villada Osorio

Por:

NATALIA PATRICIA INZUNZA MUÑOZ

Concepción, Chile

2017

Convergencia de un esquema Implícito-Explícito para un sistema mixto parabólico-hiperbólico en dos dimensiones

por

Natalia Patricia Inzunza Muñoz

Comisión examinadora:

Dr. Luis Miguel Villada

Orientador

Universidad del Bío-Bío, Chile

Dra. Verónica Anaya Domínguez

Profesora Informante

Universidad del Bío-Bío, Chile

Dra. María Carmen Martí

Profesora Informante

Universidad de Concepción, Chile

Con el apoyo de Beca de Magíster Nacional Conicyt (2016)-22160659 Fondecyt proyect 11140708

Convergencia de un esquema Implícito-Explícito para un sistema mixto parabólico-hiperbólico en dos dimensiones

Natalia Patricia Inzunza Muñoz

Universidad del Bío-Bío.

Septiembre, 2017.

Agradecimientos

En primer lugar a Dios, sin lugar a dudas lo máximo. Siempre he sentido su presencia mostrando con hechos que todo tiene solución junto a él.

A mi madre, por su apoyo incondicional. Preocupada siempre de entregarnos lo mejor, a pesar de estar en otra ciudad estudiando, siempre sentí que estaba conmigo, hablando todos los días con ella. Te amo mamá. A mi padre, que también me apoya en conjunto con mi madre a cumplir mis objetivos de vida, ante cualquier necesidad, siempre ha estado a mi lado. Mis hermanos, porque ellos creen en mi y siempre me demuestran que piensan que soy capaz de mucho más.

A mi pololo por ser mi compañía incondicional en Concepción, dándome su apoyo y amor necesario haciendo más grato el vivir lejos de mi casa.

A mi profesor guía Luis Miguel, quién desde que nos dictó ramos electivos mostró ser un gran profesor, dedicando gran parte de su tiempo para llegar al final de este proceso.

A mi amiga hermana Poly, mexicana, que me acompañó durante todo mi primer año de magíster, siendo mi consejera personal y compartiendo sus éxitos junto a mi familia, que también es su familia. A pesar que regresó a su país, constantemente ha estado preocupada por mi progreso, dándome ánimo desde la distancia y siendo un claro ejemplo de que pase lo que pase, siempre es mejor llevar la vida con alegría y disfrutarla.

Finalmente, a mis compañeros de magíster, en especial a Pedro, Vane y Yessenia, quienes fueron mis compañeros fieles de estudio durante el primer año y nos dábamos apoyo mutuo en lo necesario.

Muchas gracias a cada uno de ustedes.

Resumen

En la presente tesis, se demuestra la convergencia de un esquema de volúmenes finitos Implícito-Explícito que surge de la discretización de un sistema acoplado parabólico-hiperbólico describiendo la competencia de dos poblaciones de predador y presa en dos dimensiones. El sistema propuesto en [7], consiste de una ley de conservación con un flujo no-local y no lineal para los depredadores, acoplado con una ecuación parabólica para las presas. El esquema numérico consiste de una discretización explícita para la parte hiperbólica, junto con una discretización implícita para el término parabólico. El esquema resultante es una variante del esquema totalmente explícito presentado en [16]. Se demuestra la convergencia fuerte de la variable hiperbólica en L^1, mientras que para la parte parabólica solo convergencia débil* en L^∞. Se presentan simulaciones que describen el comportamiento característico del sistema predador-presa y la convergencia del esquema numérico.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

Modelar el comportamiento de especies que interactúan en su hábitat ha sido de principal interés en los últimos años, en particular, cuando esta interacción está relacionada con la presencia de dos especies y la evolución temporal del número de individuos que depende directamente del número de individuos de ambas especies. Un ejemplo clásico es el modelo de tipo depredador-presa presentado por Lotka-Volterra en [2, 3, 11], el cual es un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

$$\begin{cases} \partial_t u = (\alpha w - \beta) u, \\ \partial_t w = (\gamma - \delta u) w, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde:

- u representa el número de depredadores, w representa el número de presas,
- α representa el aumento de la densidad de depredadores por alimentarse de las presas, β es la tasa de mortalidad de los depredadores, γ es la tasa de natalidad de las presas y δ es la tasa de mortalidad de las presas debido a los depredadores.

En el modelo de Lotka-Volterra se asume implícitamente una distribución homogénea en el espacio de las dos poblaciones, es decir, no se considera el movimiento espacial de las especies debido a efectos migratorios o por la presencia de su rival.

El estudio de esta tesis se centra en investigar un modelo que tiene la ventaja de describir la variación espacial, más precisamente, consideraremos un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sobre el cual estarán definidas u y w, y se agrega un término difusivo $\mu\Delta w$ a la segunda ecuación de (1.1), que indica que las presas w se mueven en cualquier dirección, lo que queda representado por una ecuación parabólica. Para la primera variable, agregamos un flujo $\operatorname{div}(u\ \boldsymbol{v}(w))$, donde $u\ \boldsymbol{v}(w)$ representa la dirección preferida por los depredadores, que luego se puede mover, por ejemplo, hacia la región donde la concentración de presa es mayor. Una opción típica para la función $\boldsymbol{v}$ es

$$\boldsymbol{v}(w) = k\frac{\nabla(w*\eta)}{\sqrt{1+\|\nabla(w*\eta)\|^2}} \tag{1.2}$$

donde $k>0$ es la velocidad máxima de los depredadores, mientras que el núcleo de convolución η es diferenciable con soporte compacto en $B(0,\epsilon)$ y tal que $\int_{B(0,\epsilon)}\eta = 1$. El **producto de convolución espacio** $(w(t)*\eta)(\mathbf{x})$ produce un promedio de la densidad de la presa en el momento t alrededor de la posición $\mathbf{x}$. Observar que, el radio del soporte de η, representa cómo los depredadores pueden sentir la presencia de las presas, y por lo tanto, la dirección en que pueden cazar. Para esta especie, la ecuación resultante es del tipo hiperbólico.

Así, el sistema EDPs a resolver es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u + \operatorname{div}(f(u)\ \boldsymbol{v}(w)) & = & (\alpha w-\beta)u, & \mathbf{x}\in\Omega, \quad t\in[0,T] \\ \partial_t w - \mu\Delta w & = & (\gamma-\delta u)w, & \mathbf{x}\in\Omega, \quad t\in[0,T] \\ \nabla w\cdot\mathbf{n} & = & 0, & \mathbf{x}\in\partial\Omega, \quad t\in[0,T] \\ f(u)\cdot\ \boldsymbol{v}(w) & = & 0, & \mathbf{x}\in\partial\Omega, \quad t\in[0,T] \\ u(\mathbf{x},0) & = & u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial\overline{\Omega} \\ w(\mathbf{x},0) & = & w_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial\overline{\Omega} \end{array}\right. \tag{1.3}$$

donde

- $u=u(\mathbf{x},t)$ y $w=w(\mathbf{x},t)$ son el número de densidad de depredadores y presas, respectivamente, evaluadas en un tiempo $t\in\mathbb{R}_0^+$ y posición $\mathbf{x}\in\Omega$, $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior a Ω.
- $\boldsymbol{v}(w)$ definida en (1.2), es una función no local y no lineal de la densidad de presas w, es decir, $\boldsymbol{v}(w) := \boldsymbol{v}(w*\eta)$ indica la dirección donde hay mayor número de presas.

La existencia, unicidad, dependencia continua del dato inicial y diversas estimaciones de estabilidad para las soluciones de (1.3) se probaron en [7]. Así la solución (u, w) existe y es única en el espacio $(L^1 \cap L^\infty \cap BV)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+) \times (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$.

El sistema de EDPs en estudio (1.3), ya fue objeto de investigación en [16], donde se presenta un esquema numérico explícito, obteniendo un algoritmo mixto parabólico e hiperbólico, donde definen un paso de tiempo parabólico $\tau_p = \frac{h^2}{4\mu}$ y luego un paso de tiempo τ tal que

$$\tau = \tau_p \max \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{n\tau_p}{h} \parallel \partial_u f \parallel_{L^\infty} \parallel v \parallel_{L^\infty} < \frac{1}{4} \right\} =: m\tau_p$$

En otras palabras, τ es múltiplo de τ_p tal que satisface la siguiente condición CFL:

$$\frac{\tau}{h} \parallel \partial_u f \parallel_{L^\infty} \parallel v \parallel_{L^\infty} < \frac{1}{4}$$

Con estas condiciones, el esquema numérico mixto de [16] es:

Para $n = 0, \cdots, N-1$

$W^{n,0} = w^n$

Para $l = 0, \cdots, m-1$

$$W^{n,l+1}_{i,j} = \frac{1}{4}\left(W^{n,l}_{i+1,j} + W^{n,l}_{i-1,j} + W^{n,l}_{i,j+1} + W^{n,l}_{i,j-1}\right) \cdot \left[1 + \tau_p \left(\gamma - \delta u^n_{i,j}\right)\left(1 + \frac{\tau_p}{2}\left(\gamma - \delta u^n_{i,j}\right)\right)\right]$$

end

$$w^{n+1} = W^{n,m}$$

$$F(u_1, , u_2, t, x) = \frac{1}{2}\left(f(u_1) + f(u_2)\right) v(t, x, y) - \frac{1}{8\lambda}(u_1 - u_2)$$

$$U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} = u^n_{i,j} - \lambda\left[F(u^n_{i+1,j}, u^n_{i,j}, (n+1)\tau, x_{i+\frac{1}{2},j}) - F(u^n_{i,j}, u^n_{i-1,j}, (n+1)\tau, x_{i-\frac{1}{2},j})\right]$$

$$U^{n+1}_{i,j} = U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} - \lambda\left[F(U^{n+\frac{1}{2}}_{i+1,j}, U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}, (n+1)\tau, x_{i,j+\frac{1}{2}}) - F(U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}, U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j-1}, (n+1)\tau, x_{i,j-\frac{1}{2}})\right]$$

$$u^{n+1}_{i,j} = U^{n+1}_{i,j}\left[1 + \tau\left(\alpha w^{n+1}_{i,j} - \beta\right)\left(1 + \frac{\tau}{2}\left(\alpha w^{n+1}_{i,j} - \beta\right)\right)\right]$$

end

Para probar la convergencia del esquema numérico se hizo bajo los supuestos que se enuncian a continuación, los cuales también se asumen para la presente investigación:

(S1): $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$,

(S2): $\boldsymbol{v} : (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbf{C}^2 \cap \mathbf{W}^{2,\infty})(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ depende de w por medio de una convolución en espacio, es decir, $\boldsymbol{v}(w) := \boldsymbol{v}(\eta * w)$ para un espacio dependiente del núcleo de convolución $\eta \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Además, existe una constante K y una función creciente $C \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$ tal que para todo $w \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\|\nabla\ \boldsymbol{v}(\mathbf{w})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times 2})} &\leq K\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})} \\
\|\nabla\ \boldsymbol{v}(\mathbf{w})\|_{L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times 2})} &\leq K\|w\|_{L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})} \\
\|\nabla\left(\nabla\ \boldsymbol{v}(\mathbf{w})\right)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)} &\leq C\left(\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})}\right),
\end{aligned}$$

(S3): $(u_0, w_0) \in (L^1 \cap L^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^+) \times (L^1 \cap L^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^+)$ son funciones de valores positivos, es decir $u_0 \geq 0$ y $w_0 \geq 0$ c.t.p. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

En esta tesis aproximaremos la solución del sistema (1.3), utilizando un esquema de volúmenes finitos implícito, como alternativa al esquema numérico explícito (1.4), para aproximar el término parabólico de la segunda ecuación. Además, probaremos la convergencia del esquema numérico implícito-explícito a la solución de (1.3).

Para cumplir estos objetivos, el trabajo lo organizaremos de la siguiente manera. En el Capítulo 2, daremos todas las definiciones y notaciones necesarias que se utilizarán en el desarrollo de esta investigación. En el capítulo 3, se presentan los conceptos básicos de volúmenes finitos, para finalmente presentar el esquema numérico implícito-explícito propuesto, mostrando paso a paso su obtención, tanto para el término difusivo, convectivo y de reacción. En el capítulo 4, se muestran todos los lemas necesarios para mostrar la convergencia del esquema propuesto y finalmente se muestra la convergencia del esquema numérico implícito-explícito. En el capítulo 5, revisaremos los ejemplos numéricos que muestran la eficiencia del esquema propuesto, a través de la comparación del tiempo CPU utilizado por el esquema explícito versus el tiempo CPU utilizado por el esquema implícito-explícito.

Capítulo 2

Definiciones y notaciones

En esta sección vamos a dar a conocer las definiciones necesarias para nuestros objetivos de investigación, al igual que introducir las notaciones que usaremos para el resto de las demostraciones, que nos permitirán obtener los resultados deseados.

Para comenzar,damos las definiciones de los espacios a utilizar. De [4], se designa por $L^1(\Omega)$ el espacio de las funciones integrables sobre Ω con valores de $\mathbb{R}$. Se escribe,

$$\| f \|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Por notación, en el texto utilizaremos $\| f \|_{L^1} = \| f \|_1$. Por otro lado, se designa por $C_c(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas en Ω y con soporte compacto, es decir,

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K \ donde\ K \subset \Omega \ es\ un\ compacto\}$$

Se define $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f es\ medible\ y\ existe\ una\ constante\ C\ \ tal\ que\ |f(x)| \leq C\ \ c.t.p.\ en\ \ \Omega\}$ y se nota

$$\| f \|_{L^\infty} = \text{ínf}\{C; |f(x)| \leq C\ \ c.t.p.\ en\ \Omega\}$$

.

El espacio de Sobolev $W^{2,\infty}(\Omega)$ se define por

$$W^{2,\infty}(\Omega) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) \middle| \forall \alpha \ con \ |\alpha| \leq 2, \exists g_\alpha \in L^\infty(\Omega) \ tal \ que \ \int_\Omega u D' \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}$$

De [15] recordamos qué es la solución débil de (1.3), separando las ecuaciones parabólica e hiperbólica. Fijamos $t_0, T \in \mathbb{R}^+$, con $T > t_0$ y denotamos $I = [t_0, T]$.

Definición 2.1 (Solución débil para w) *Sea $a \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times I; \mathbb{R})$ y $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Una solución débil para*

$$\begin{cases} \partial_t w - \mu \Delta w = a(\boldsymbol{x}, t) w \\ w(\boldsymbol{x}, 0) = w_0(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

es una función $w \in C^0(I; L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$ tal que para toda función test $\varphi \in C^1(I; C_c^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (w \partial_t \varphi + \mu w \Delta \varphi + a w \varphi) dx dt = 0$$

y $w(\boldsymbol{x}, 0) = w_0(\boldsymbol{x})$.

Definición 2.2 (Solución débil para u) *Sea $b \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times I; \mathbb{R}), c \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times I; \mathbb{R})$ y $u_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Una solución débil para*

$$\begin{cases} \partial_t u - div(c(\boldsymbol{x}, t) u) = b(\boldsymbol{x}, t) u \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

es una función $u \in C^0(I; L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$ tal que para toda función test $\varphi \in C_c^1(\mathring{I} \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^N} (u \partial_t \varphi + u c \cdot \nabla \varphi + b u \varphi) dx dt = 0$$

y $u(\boldsymbol{x}, t_0) = u_0(\boldsymbol{x})$.

Antes de comenzar el principal resultado analítico, observar que el sistema (1.3) está definido por algunos parámetros reales y positivos, y por la función $\boldsymbol{v}$. Por tanto, se requiere los supuestos (**S1**), (**S2**) y (**S3**) enunciados en la introducción. Bajo condiciones de regularidad razonables en el kernel η, el Lema 4.1 en [7] asegura que el operador $\boldsymbol{v}$ en (1.2) satisface **(S2)**.

Para las demostraciones, es necesario tener claras las definiciones de algunas normas y espacios L^p. En particular en los espacios L^1 y L^∞, utilizados para demostrar la convergencia de nuestro método. De [4], encontramos:

Notación: Sea E un **espacio vectorial normado** (e.v.n.) de norma $\| \cdot \|$, se denota por E^* el dual topológico de E, es decir, el espacio de todas las **formas lineales y continuas sobre E**. E^* está dotado de la norma dual

$$\| f \|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} f(x).$$

Cuando $f \in E^*$ y $x \in E$ se denotará generalmente por $< f, x >$ en lugar de $f(x)$. Se dice que $<,>$ es el **producto escalar en la dualidad** E^*, E.

Corolario 2.1 *Para todo $x_0 \in E$, existe $f_0 \in E^*$ tal que*

$$\| f_0 \| = \| x_0 \| \qquad < f_0, x_0 > = \| x_0 \|^2 .$$

Corolario 2.2 *Para todo $x \in E$ se tiene*

$$\| x \| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} | < f, x > | = \max_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} | < f, x > |.$$

Notación: Sean E y F dos e.v.n. Se denota por $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de los operadores lineales y continuos de E en F dotado de la norma

$$\| T \|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \| Tx \|.$$

Teorema 2.3 (Banach-Steinhaus) *Sean E y F dos espacios Banach. Sea $(Ti)_{i\in I}$ una familia de operadores lineales y continuos de E en F. Supongamos que*

$$\sup_{i\in I} \| T_i x \| < \infty, \ \ \forall x \in E, \quad \textit{entonces} \quad \sup_{i\in I} \| T_i \|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Dicho de otra forma, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\| T_i x \| \leq C \| x \| \qquad \forall x \in E, \qquad \forall i \in I.$$

Teorema 2.4 *Sea $\varphi \in (L^1)^*$. Entonces existe $u \in L^\infty$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf \qquad \forall f \in L^1.$$

Además se verifica

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)^*}.$$

En resumen, el teorema anterior afirma que toda forma lineal y continua sobre L^1 se representa por medio de una función de L^∞. La aplicación $\varphi \longmapsto u$ es una isometría que permite identificar $(L^1)^*$ con L^∞.

Considerando que $L^\infty = (L^1)^*$, el espacio L^∞ posee las siguientes **propiedades**:

- La bola unidad cerrada B_{L^∞} es compacta en la topología débil * $\sigma(L^\infty, L^1)$.

- Si (f_n) es una sucesión acotada en L^∞, cabe extraer una subsucesión que converge en L^∞ en la topología débil * $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Observación 2.5 *El dual de L^∞ contiene a L^1 y es estrictamente mayor que L^1.*

Según [4], una función es de variación acotada, si cumple con la siguiente definición:

Definición 2.3 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$,$a < b$,$[a, b]$ intervalo en $\mathbb{R}$, y una partición $\mathcal{P}([a, b])$, tal que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Se define la* ***variación de una función f****, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, para todo $t \in \mathcal{P}([a, b])$ como*

$$S_{abs}(f, t) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

La ***variación total de f*** *en $[a, b]$ se define mediante:*

$$Var_a^b f : \sup_{t \in \mathcal{P}([a,b])} S_{abs}(f, t) = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de ***variación acotada*** *en $[a, b]$ si $Var_a^b f < +\infty$. El conjunto de todas las funciones de variación acotada en $[a, b]$ se denota por $BV[a, b]$.*

Considerando la definición anterior, de [8] se tiene el siguiente resultado de compacidad:

Teorema 2.6 *Cualquier sucesión $\{v_l\}$ en $BV_{loc}(\chi)$, tal que $\| v_l \|_{L^1(\mathcal{Y})}$ y $TV_{\mathcal{Y}_{v_l}}$ es uniformemente acotada en todos los abiertos acotados $\mathcal{Y} \subset \chi$, contiene una subsucesión que converge en $L^1_{loc}(\chi)$, así como casi en todas partes de χ, a alguna función v en $BV_{loc}(\chi)$, con $TV_{\mathcal{Y}_v} \leq \lim_{l \longrightarrow \infty} \inf TV_{\mathcal{Y}_{v_l}}$*

El esquema numérico que se obtendrá, se puede escribir en forma matricial. Esto será de gran utilidad para demostrar la positividad de la solución del sistema (1.3), para lo que es necesario conocer las siguientes definiciones y teoremas, obtenidos de [17].

Teorema 2.7 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$ estrictamente diagonal dominante o irreducible diagonal. Entonces, la matriz A es no singular. Si todas las entradas de la diagonal del A, son además números reales positivos, entonces los valores propios λ_i de A satisfacen*

$$Re(\lambda_i) > 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Corolario 2.8 *Si $A = (a_{ij})$ es una matriz Hermítica $n \times n$ estrictamente diagonal dominante o irreductible diagonal dominante con entradas reales positivas en la diagonal, entonces A es definida positiva.*

Lema 2.9 (Hadamard) *Si* $A = (a_{ij})$, $\forall i, j = \{1, ..., n\}$ *es una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces* A *es invertible.*

Definición 2.4 *Sea* A *una matriz real, de tamaño* $n \times n$. *Decimos que* A *es monótona si* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Ax \geq 0$ *entonces* $x \geq 0$. *Equivalentemente,* A *es inversa-positiva, es decir* A^{-1} *existe y* $A^{-1} \geq 0$

Ahora que ya tenemos las definiciones y teoremas necesarios, comenzaremos a describir la notación que utilizaremos para el desarrollo de este proyecto.

Capítulo 3

Esquema numérico

En este capítulo partiremos con los conceptos básicos de Método de Volúmenes Finitos, ver [9], hasta llegar a la propuesta del esquema para la solución de (1.3).

3.1. Discretización de Ω, en el sentido de volúmenes finitos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado abierto, $\Omega = (a,b) \times (c,d)$. Sea $h > 0$ y $\left\{ \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right) \right\}_{i=1}^{N}$ una partición uniforme de $[a,b]$, tal que $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = h = \dfrac{b-a}{N}$, de modo que:

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < x_{\frac{5}{2}} < \cdots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = b$$

Se define la sucesión de puntos $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, tal que $x_i = \dfrac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}{2}$. Análogamente, se define la partición uniforme $\left\{ \left(y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right) \right\}_{j=1}^{M}$ de $[c,d]$, tal que $y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} = h = \dfrac{d-c}{M}$ y $\{y_j\}_{j=1}^{M}$ sucesión de puntos, con $y_j = \dfrac{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}}{2}$.
Dado lo anterior, para $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$, se define cada celda $C_{i,j}$ como sigue:

$$C_{i,j} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$$

las cuáles definen una malla Π_h para Ω, con $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$, el punto centro de cada celda antes definida, luego $\Pi_h = \{C_{i,j} : i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, M\}$ de modo que

$$\Omega = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,M}} C_{i,j}.$$

La medida de la celda $C_{i,j}$ es $m(C_{i,j}) = h^2$, luego el valor medio de u y w, sobre la celda $C_{i,j}$ es, respectivamente,

$$\overline{u}_{i,j}(t) = \frac{1}{h^2}\int_{C_{i,j}} u(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} \qquad y \qquad \overline{w}_{i,j}(t) = \frac{1}{h^2}\int_{C_{i,j}} w(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}.$$

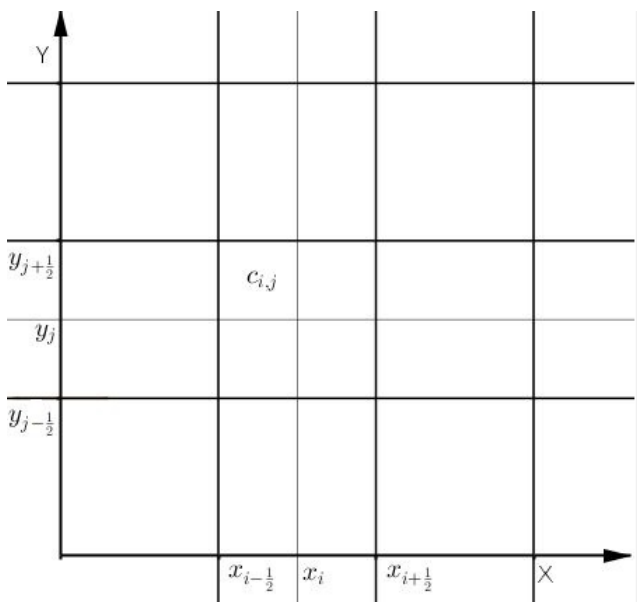

Figura 3.1: Malla cartesiana con celdas uniformes vía Volúmenes Finitos

Nuestro problema está formado por una ecuación parabólica y otra hiperbólica. Para obtener el esquema numérico, analizaremos primero el esquema numérico para la ecuación parabólica y luego el correspondiente a la ecuación hiperbólica.

3.2. Esquema numérico para la ecuación parabólica

Primero analizaremos el esquema numérico para la ecuación parabólica, que la trabajaremos de forma implícita, haciendo diferencia con el estudio ya realizado en [16]:

$$\partial_t w(\mathbf{x},t) - \mu\Delta w(\mathbf{x},t) = 0, \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T) \tag{3.1a}$$

$$\nabla w(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{3.1b}$$

$$w(0,\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3.1c}$$

donde en (3.1b) se tiene una condición de contorno de Neumann, considerando $\mathbf{n}$ como el vector normal exterior a Ω y en (3.1c) la condición inicial para la ecuación. Integraremos la ecuación (3.1a), sobre cada celda $C_{i,j}$ de Π_h , $C_{i,j} \in \Omega^\circ$, para $i = 1,\ldots,N$ y $j = 1,\ldots,M$, se tiene:

$$\int_{C_{i,j}} w_t(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} - \int_{C_{i,j}} \mu \triangle w(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = 0.$$

Analizaremos cada una de las integrales por separado, para la primera integral utilizamos el valor promedio de w en cada celda, como se definió anteriormente, obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_{C_{i,j}} w_t(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} &= \frac{d}{dt}\left(\int_{C_{i,j}} w(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(h^2\overline{w}_{i,j}(t)\right).\end{aligned}$$

La segunda integral queda:

$$
\begin{aligned}
-\int_{C_{i,j}} \mu \triangle w(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} &= -\int_{C_{i,j}} \mu(w_{xx}(\cdot,\mathbf{x}) + w_{yy}(\cdot,\mathbf{x}))d\mathbf{x} \\
&= -\mu \cdot \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w_{xx}(\cdot,\mathbf{x})dxdy - \mu \cdot \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w_{yy}(\cdot,\mathbf{x})dxdy \\
&= -\mu \cdot \left[\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} w_x(t, x_{i+\frac{1}{2}}, y)dy - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} w_x(t, x_{i-\frac{1}{2}}, y)dy \right] \\
&\quad -\mu \cdot \left[\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w_y(t, x, y_{j+\frac{1}{2}})dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w_y(t, x, y_{i-\frac{1}{2}})dx \right],
\end{aligned}
$$

usando cuadratura de Gauss de un punto, considerando que y_j es el centro de $[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ y un error $\mathcal{O}(h^2)$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} w_x\left(\cdot, y\right) dy &= \frac{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}}{2} \int_{-1}^{1} w_x \left(\cdot, \frac{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}}{2} y + \frac{y_{j+\frac{1}{2}} + y_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right) dy \\
&= \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} w_x \left(\cdot, \frac{h}{2} y + y_j \right) dy \\
&= h \cdot w_x\left(\cdot, y_j\right) + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}
$$

Por la condición de frontera del problema dado en (3.1b), si $[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}] \subset \partial\Omega$, $w_x(\cdot, y) = 0$, para $y \in [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$.

Ahora, considerando la derivada de w en el punto $(t, x_{i+\frac{1}{2}}, y)$:

$$
w_x(t, x_{i+\frac{1}{2}}, y) = \frac{w\left(t, x_{i+1}, y\right) - w\left(t, x_i, y\right)}{h} + \mathcal{O}(h^2).
$$

Por notación el borde que comparte la celda $C_{i,j}$ con la celda vecina D es $\sigma = C_{i,j}|D$ y considerando las soluciones de w en el centro de la celda $C_{i,j}$ y D como $\overline{w}_D(t)$ y $\overline{w}_{C_{i,j}}(t)$, respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_\sigma w_x(t, x_{i+\frac{1}{2}}, y)dy &= hw_x(t, x_{i+\frac{1}{2}}, y) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= h\left(\frac{w\left(t, x_{i+1}, y_j\right) - w\left(t, x_i, y_j\right)}{h} + \mathcal{O}(h^2)\right) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= w\left(t, x_{i+1}, y_j\right) - w\left(t, x_i, y_j\right) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \overline{w}_D(t) - \overline{w}_{C_{i,j}}(t) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= -F_{C_{i,j},\sigma}(t) + \mathcal{O}(h^2),
\end{aligned}$$

donde se define:

$$F_{C_{i,j},\sigma}(t) = \begin{cases} -(\overline{w}_D(t) - \overline{w}_{C_{i,j}}(t)), & \forall\sigma \in \varepsilon_{int}, \quad \sigma = C_{i,j}|D, \quad t \in [0, T] \\ 0, & \forall\sigma \in \varepsilon_{C_{i,j}}, \quad \sigma \subset \partial\Omega, \qquad t \in [0, T] \end{cases} \tag{3.2}$$

ε_{int} representa los bordes interiores de Ω, dados en la discretización de la sección 3.1, $\varepsilon_{C_{i,j}}$ el conjunto de los bordes de cada celda $C_{i,j}$.

Análogamente, se obtienen las otras integrales para conseguir la aproximación de la segunda integral.

Luego, la ecuación (3.1a), para $t \in [0, T]$, puede escribirse como:

$$\frac{d(\overline{w}_{C_{i,j}}(t))}{dt} - \frac{\mu}{h^2}\sum_{\sigma\in\varepsilon_{C_{i,j}}} F_{C_{i,j},\sigma}(t)) = 0 \tag{3.3}$$

Para aproximar la derivada en (3.3), se considera una discretización en tiempo

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T, \tag{3.4}$$

donde $\overline{w}^n_{i,j} \approx w(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in C_{i,j}$, $t \in [t_{n-1}, t_n]$.

Aproximando (3.3) en t_n y en la derivara utilizamos la fórmula de diferencia regresiva, obteniendo una formulación implícita, luego para la celda $C_{i,j}$:

$$\frac{(\overline{w}_{C_{i,j}}(t^{n+1}) - \overline{w}_{C_{i,j}}(t^n))}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) - \frac{\mu}{h^2}\sum_{\sigma\in\varepsilon_{C_{i,j}}} F^{n+1}_{C_{i,j},\sigma} + \mathcal{O}(h^2) = 0, \tag{3.5}$$

donde $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ y un error $\mathcal{O}(\Delta t)$.

Observación 3.1 *Utilizando la fórmula de diferencia progresiva en (3.3) para la derivada, se obtiene una formulación explícita, la cual es condicionalmente estable, mientras que una formulación implícita es incondicionalmente estable.*

Finalmente, el esquema numérico, para $C_{i,j} \in \Pi_h$, queda escrito como, ver en [9]:

$$\overline{w}_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t \mu}{h^2} \sum_{\sigma \in \varepsilon_{C_{i,j}}} F_{C_{i,j},\sigma}^{n+1} = \overline{w}_{i,j}^{n}, \qquad C_{i,j} \in \Pi_h. \tag{3.6}$$

3.3. Esquema numérico para la ecuación hiperbólica

A continuación, obtendremos el esquema numérico para la ecuación hiperbólica:

$$\partial_t u + \operatorname{div}(f(u)\ \boldsymbol{v}(w)) = 0, \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times [0,T] \tag{3.7a}$$

$$f(u(\mathbf{x},t))\ \boldsymbol{v}(w(\mathbf{x},t)) = 0, \qquad (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{3.7b}$$

$$u(0,\mathbf{x}) = u_o(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \tag{3.7c}$$

donde $\boldsymbol{v}(w) :=\ \boldsymbol{v}(w * \eta) = \dfrac{\nabla(w*\eta)}{\sqrt{1 + \parallel \nabla(w*\eta) \parallel^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \parallel \nabla(w*\eta) \parallel^2}}(w*\eta_x, w*\eta_y).$

Integraremos la ecuación (3.7a), sobre cada celda $C_{i,j}$ de Π_h, para $i = 1,\dots,N$ y $j = 1,\dots,M$, se tiene:

$$\int_{C_{i,j}} u_t(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} + \int_{C_{i,j}} \operatorname{div}(f(u)\ \boldsymbol{v}(w))d\mathbf{x} = 0.$$

Analizaremos cada una de las integrales por separado, para la primera integral se utiliza la misma aproximación que para la ecuación parabólica. Para la segunda integral, usando el teorema de la divergencia la cuadratura de Gauss de un punto, queda:

$$\begin{aligned}
&\int_{C_{i,j}} \operatorname{div}(f(u)\ \boldsymbol{v}(w))d\mathbf{x} = \int_{\partial C_{i,j}} f(u)\ \boldsymbol{v}(w)\mathbf{n}d\gamma\mathbf{(x)} \\
&= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(u(t,x,y_{j+\frac{1}{2}}))\ \boldsymbol{v}(t,x,y_{j+\frac{1}{2}}) \cdot \mathbf{n}_{i,j+\frac{1}{2}} dx + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(u(t,x_{i+\frac{1}{2}},y))\ \boldsymbol{v}(t,x_{i+\frac{1}{2},y_j}) \cdot \mathbf{n}_{i+\frac{1}{2},j} dy \\
&- \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(u(t,x,y_{j-\frac{1}{2}}))\ \boldsymbol{v}(t,x,y_{j-\frac{1}{2}}) \cdot \mathbf{n}_{i,j-\frac{1}{2}} dx - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(u(t,x_{i-\frac{1}{2}},y))\ \boldsymbol{v}(t,x_{i-\frac{1}{2},y_j}) \cdot \mathbf{n}_{i-\frac{1}{2},j} dy \\
&= h\left[f(u(t,x_i,y_{j+\frac{1}{2}}))\ \boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + f(u(t,x_{i+\frac{1}{2}},y_j))\ \boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j} - f(u(t,x_i,y_{j-\frac{1}{2}}))\ \boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}} - f(u(t,x_{i-\frac{1}{2}},y_j))\ \boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}\right] + \mathcal{O}(h),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $\boldsymbol{v}_{i,j\pm\frac{1}{2}}(t) = \boldsymbol{v}(w(t,x_i,y_{j\pm\frac{1}{2}}))\cdot \mathbf{n}_{i,j+\frac{1}{2}} = \dfrac{\pm w*\eta_y}{\sqrt{1+\parallel \nabla(w*\eta)\parallel^2}}$ y $\mathbf{n}_{i,j+\frac{1}{2}}$ es el vector normal a la celda $C_{i,j}$ en el punto $(t,x_i,y_{j+\frac{1}{2}})$ hacia afuera y $\mathcal{O}(h)$ un error de aproximación de cuadratura. Análogamente, $\boldsymbol{v}_{i\pm\frac{1}{2},j}(t) = \boldsymbol{v}(w(t,x_{i\pm\frac{1}{2}},y_j))\cdot \mathbf{n}_{i\pm\frac{1}{2},j} = \dfrac{\pm w*\eta_x}{\sqrt{1+\parallel \nabla(w*\eta)\parallel^2}}$. Además, si $[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$ o $[y_{j-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}]$ están en la frontera de Ω, se tiene $f(u)\ \boldsymbol{v}(w)=0$.

Para aproximar el flujo $F_{i,j+\frac{1}{2}} = f(u(t,x_i,y_{j+\frac{1}{2}}))v_{i,j+\frac{1}{2}}$ lo hacemos con el método conservativo Lax-Friedrichs disipativo, que es un método explícito y una aproximación de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio:

$$\begin{aligned} F_{i,j+\frac{1}{2}}(t) &= \tfrac{1}{2}\left[f(\overline{u}_{i,j}(t)) + f(\overline{u}_{i,j+1}(t))\right] v_{i,j+\frac{1}{2}}(t) - \tfrac{\alpha}{2}(\overline{u}_{i,j+1}(t) - \overline{u}_{i,j}(t)),\\ F_{i+\frac{1}{2},j}(t) &= \tfrac{1}{2}\left[f(\overline{u}_{i+1,j}(t)) + f(\overline{u}_{i,j}(t))\right] v_{i+\frac{1}{2},j}(t) - \tfrac{\alpha}{2}(\overline{u}_{i+1,j}(t) - \overline{u}_{i,j}(t)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $\alpha = \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel \boldsymbol{v} \parallel_\infty$. Aplicando (3.8), se tiene

$$\int_{C_{i,j}} \operatorname{div}(f(u)\ \boldsymbol{v}(w))d\mathbf{x} = h\left[F_{i+\frac{1}{2},j}(t) - F_{i-\frac{1}{2},j}(t) + F_{i,j+\frac{1}{2}}(t) - F_{i,j-\frac{1}{2}}(t)\right] + \mathcal{O}(h).$$

Por lo anterior, el esquema numérico de la ecuación hiperbólica, según la discretización espacial, nos queda:

$$h^2\left(\frac{d(\overline{u}_{i,j}(t))}{dt}\right) + h\left[F_{i+\frac{1}{2},j}(t) - F_{i-\frac{1}{2},j}(t) + F_{i,j+\frac{1}{2}}(t) - F_{i,j-\frac{1}{2}}(t)\right] = 0.$$

Ahora, utilizando la discretización temporal de (3.4) y una diferencia progresiva para la derivada, aproximamos la ecuación anterior en el tiempo t^n, obteniendo una formulación explícita, para $i=0,\ldots,N$ y $j=0,\ldots,M$, como sigue:

$$h^2\frac{\overline{u}_{i,j}(t^{n+1}) - \overline{u}_{i,j}(t^n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) + h\left[F^n_{i+\frac{1}{2},j} - F^n_{i-\frac{1}{2},j} + F^n_{i,j+\frac{1}{2}} + F^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right] = 0,$$

donde $F^n_{i,j} := F(t_n,x_i,y_j)$ definido en (3.9). Así el esquema numérico, es el siguiente:

$$\overline{u}^{n+1}_{i,j} = \overline{u}^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{h}\left[\left(F^n_{i+\frac{1}{2},j} - F^n_{i-\frac{1}{2},j}\right) + \left(F^n_{i,j+\frac{1}{2}} - F^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\right] \tag{3.10}$$

3.3.1. Aproximación del término de convolución

Para aproximar el término de velocidad, $\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}$ o $\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}$ del flujo numérico antes definido, procederemos de la siguiente forma:

Primero definimos el cálculo numérico del $\boldsymbol{v}(w^n) = \boldsymbol{v}(w^n * \eta)$ en cada centro (x_i, y_j) de la celda $C_{i,j} \in \Pi_h$, ya que el término $\boldsymbol{v}$ se define como una convolución del término w y la función kernel η. Para esto consideramos que $\eta(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \Omega$, tiene soporte en $B(0, \epsilon)$, es decir $[-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon]$, de manera que $kh = \epsilon$. Luego, para $\eta = \eta_x$ o $\eta = \eta_y$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
(w * \eta)((x_i, y_j), t^n) &= \int_{B((x_i,y_j,t^n),\epsilon)} \eta((x,y) - (x_i, y_j)) w(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x} \\
&= \sum_{r=-k}^{k} \sum_{s=-k}^{k} \int_{C_{i+r,j+s}} \eta((x,y) - (x_{i+r}, y_{j+s})) w^n_{i+r,j+s} dydx \\
&= \sum_{r=-k}^{k} \sum_{s=-k}^{k} w^n_{i+r,j+s} \int_{C_{i+r,j+s}} \eta((x,y) - (x_{i+r}, y_{j+s})) dydx + \mathcal{O}(h) \\
&\approx \sum_{r=-k}^{k} \sum_{s=-k}^{k} \overline{w}_{i+r,j+s} \int_{C_{i+r,j+s}} \eta((x,y) - (x_{i+r}, y_{j+s})) dydx,
\end{aligned}
$$

donde $\int_{C_{i+r,j+s}} \eta((x,y) - (x_{i+r}, y_{j+s})) dydx$ se calcula de manera exacta o aproximada, precomputada para ahorrar tiempo computacional.

Finalmente, utilizando interpolación obtenemos $\boldsymbol{v}^n_{i+\frac{1}{2},j} = \dfrac{\boldsymbol{v}(x_{i+1}, y_j, t^n) + \boldsymbol{v}(x_i, y_j, t^n)}{2}$, análogamente se obtiene $\boldsymbol{v}^n_{i,j+\frac{1}{2}} = \dfrac{\boldsymbol{v}(x_i, y_{j+1}, t^n) + \boldsymbol{v}(x_i, y_j, t^n)}{2}$.

3.4. Esquema numérico término de reacción

En esta sección, obtendremos la aproximación de la solución para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias EDO: el clásico modelo Lotka-Volterra, que se detalla a continuación. Para esto utilizaremos una dicretización temporal de segundo orden, sin considerar discretización espacial.

$$
\begin{cases} \partial_t w = (\gamma - \delta u) w, \\ \partial_t u = (\alpha w - \beta) u, \end{cases} \tag{3.11}
$$

Para aproximar la primera ecuación, integramos ambos lados de la ecuación en cada celda, considerando $u_{i,j}^n$ como constante,

$$\begin{aligned}
\partial_t w(\mathbf{x},t) = (\gamma - \delta u) w(\mathbf{x},t) &\Rightarrow \int_{C_{i,j}} \partial_t w(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} = \int_{C_{i,j}} (\gamma - \delta u) w(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(h^2 \overline{w}_{i,j}(t)) = (\gamma - \delta u_{i,j}^n)(h^2 \overline{w}_{i,j}(t)) + \mathcal{O}(h^2) \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\overline{w}_{i,j}(t)) = (\gamma - \delta u_{i,j}^n)(\overline{w}_{i,j}(t)).
\end{aligned}$$

Observación 3.2 *Desde ahora, para reducir notación, utilizaremos* $\overline{w}_{i,j}(t) = w_{i,j}(t)$ *y* $\overline{u}_{i,j}(t) = u_{i,j}(t)$.

Para aproximar la solución de $w_{i,j}$ en el tiempo t^{n+1}, utilizaremos una aproximación de Taylor de orden 2, con un paso de tiempo Δt y considerando $u_{i,j}^n$ como constante. Luego, nos queda:

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t}\left(w_{i,j}^n\right) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(w_{i,j}^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Considerando que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_{i,j}^n) = (\gamma - \delta u_{i,j}^n) w_{i,j}^n \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(w_{i,j}^n) = \frac{\partial}{\partial w_{i,j}^n}\left((\gamma - \delta u_{i,j}^n) w_{i,j}^n\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(w_{i,j}^n) = (\gamma - \delta u_{i,j}^n)^2 w_{i,j}^n,$$

entonces:

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n \left[1 + \Delta t\left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right)\right)\right]$$

Esta aproximación la utilizamos como constante, para aproximar la segunda ecuación del sistema, obteniendo:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n \left[1 + \Delta t\left(\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\left(\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta\right)\right)\right].$$

3.5. Esquema implícito-explícito

Usando la técnica *Splitting*, sobre (1.3) y utilizando los resultados obtenidos en las tres secciones anteriores, obtenemos el esquema numérico implícito y explícito en un paso. En las secciones posteriores mostraremos su convergencia.

Algoritmo 3.3 *Dado* $\{u_{i,j}^n\}$ *y* $\{w_{i,j}^n\}$*, obtenemos las soluciones* u *y* w *en el tiempo* $n+1$ *de:*

$$w_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t \mu}{h^2} \sum_{\sigma \in \varepsilon_{C_{i,j}}} F_{C_{i,j},\sigma}^{n+1} = w_{i,j}^n \left[1 + \Delta t \left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right)\right)\right] \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & \left[u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left[\left(F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n\right) + \left(F_{i,j+\frac{1}{2}}^n - F_{i,j-\frac{1}{2}}^n\right)\right]\right] \times \\ & \left[1 + \Delta t \left(\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $F_{C_{i,j},\sigma}^{n+1}$ *es dado en* (3.2) *y* $F_{i+\frac{1}{2},j}^n$ *en* (3.9).

Para que el esquema numérico (3.13) sea estable debe satisfacer una condición CFL, que la obtendremos garantizando la positividad de la solución $u_{i,j}^{n+1}$.

Considerando $S = (\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta)$, se tiene que la parábola $1 + S + \frac{S^2}{2} \geq 0$, así nos falta probar la positividad de

$$\left[u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left[\left(F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n\right) + \left(F_{i,j+\frac{1}{2}}^n - F_{i,j-\frac{1}{2}}^n\right)\right]\right]$$

Utilizando (3.9), $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$ y reordenando obtenemos,

$$\begin{aligned}
&u_{i,j}^n - \lambda\left[\frac{1}{2}\left(f(u_{i+1,j}^n) + f(u_{i,j}^n)\right)\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\alpha}{2}\left(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n\right) - \frac{1}{2}\left(f(u_{i,j}^n) + f(u_{i-1,j}^n)\right)\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + \frac{\alpha}{2}\left(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n\right)\right] \\
&\quad - \lambda\left[\frac{1}{2}\left(f(u_{i,j+1}^n) + f(u_{i,j}^n)\right)\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\alpha}{2}\left(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n\right) - \frac{1}{2}\left(f(u_{i,j}^n) + f(u_{i,j-1}^n)\right)\boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{\alpha}{2}\left(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n\right)\right] \\
&\quad = u_{i+1,j}^n\left[\lambda\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}\right] + u_{i-1,j}^n\left[\lambda\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right] \\
&\quad + u_{i,j+1}^n\left[\lambda\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i,j+1}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i,jV}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right] + u_{i,j-1}^n\left[\lambda\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i,j-1}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right] \\
&\quad + u_{i,j}^n\Bigg[1 - 2\lambda\alpha + \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + \frac{f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i,j+1}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i,jV}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i,j-1}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\Bigg]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Con $\alpha = \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel \boldsymbol{v} \parallel_\infty$, necesitamos que se cumpla

$$\begin{aligned}
&\Bigg[1 - 2\lambda\alpha + \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + \frac{f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \\
&+ \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i,j+1}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i,j-1}^n) - f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{f(u_{i,j}^n)}{u_{i,j}^n}\boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\Bigg] \\
&\geq 1 - 8\lambda \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel \boldsymbol{v} \parallel_\infty \geq 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

De (3.5) la condición CFL a considerar sería

$$\lambda \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel \boldsymbol{v} \parallel_\infty < \frac{1}{8} \tag{3.16}$$

la cual es una restricción muy severa, que nos aumentaría el tiempo de CPU para obtener resultados numéricos, reduciendo la eficiencia de nuestro método. Para evitar esto, ya no resolveremos el problema en un solo paso, si no que usaremos la técnica dimensional *Splitting*, ver en [13], para resolver primero en la dirección de X y luego en la dirección de Y, aproximando el flujo hiperbólico mediante el método numérico de Lax Friedrichs, donde la condición CFL a utilizar que nos garantiza la positividad de la solución queda:

$$\lambda \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel \boldsymbol{v} \parallel_\infty < \frac{1}{4} \tag{3.17}$$

Así, el esquema numérico que proponemos es

Algoritmo 3.4 *Dado las soluciones* $\{u_{i,j}^n\}$ *y* $\{w_{i,j}^n\}$ *(en el tiempo* n*), obtenemos las soluciones en el tiempo* $n+1$*, mediante el esquema numérico:*

$$w_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t \mu}{h^2} \sum_{\sigma \in \varepsilon_{C_{i,j}}} F_{C_{i,j},\sigma}^{n+1} = w_{i,j}^n \left[1 + \Delta t \left(\gamma - \delta u_{i,j}^n \right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\gamma - \delta u_{i,j}^n \right) \right) \right] \tag{3.18a}$$

$$F(u_1, u_2, t, x) = \frac{1}{2}(f(u_1) + f(u_2))\boldsymbol{v}(t, x) - \frac{1}{8\lambda}(u_1 - u_2) \tag{3.18b}$$

$$U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^n - \lambda \left[F(u_{i+1,j}^n, u_{i,j}^n, (n+1)\Delta t, x_{i+\frac{1}{2},j}) - F(u_{i,j}^n, u_{i-1,j}^n, (n+1)\Delta t, x_{i-\frac{1}{2},j}) \right] \tag{3.18c}$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \lambda \left[F(U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}, U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, (n+1)\Delta t, x_{i,j+\frac{1}{2}}) - F(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, U_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}, (n+1)\Delta t, x_{i,j-\frac{1}{2}}) \right] \tag{3.18d}$$

$$u_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n+1} \left[1 + \Delta t \left(\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta \right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta \right) \right) \right], \tag{3.18e}$$

bajo la condición CFL (3.17) *y donde* $F_{C_{i,j},\sigma}(t)$ *está definido en* (3.2).

A continuación probaremos los lemas necesarios para probar la convergencia del esquema numérico implícito - explícito dado por (3.18).

Capítulo 4

Convergencia del esquema numérico Implícito Explícito

En el presente capítulo, seguiremos el razonamiento de [16] para demostrar la convergencia de nuestro esquema numérico (3.18). Los resultados para u son idénticos a los presentados en [16], ya que nuestro esquema utiliza la misma técnica de aproximación explícita. Lo interesante y nuevo, son las demostraciones con respecto a w, ya que discretizamos de forma implícita.

4.1. Existencia y Unicidad de la solución

Lema 4.1 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $T > 0$. Sea $(u_0, w_0) \in (L^1 \cap L^\infty \cap \boldsymbol{BV})(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^+) \times (L^1 \cap L^\infty \cap \boldsymbol{BV})(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^+)$, que cumple la suposición **(S3)**. Se define $(u_0, w_0) = (u(\cdot, 0), w(\cdot, 0))$. Sea Π_h una malla definida como en la sección* (3.1) *y $\Delta t \in (0, T)$. Entonces dado $(u_{i,j}^n, w_{i,j}^n)$, existe un único vector $(u_{i,j}^{n+1}, w_{i,j}^{n+1})$, que satisface* (3.18)*, con $C_{i,j}$ una celda de Π_h.*

Demostración:

Para u, considerando que existe la solución en el tiempo n, podemos asegurar la existencia de la solución en el tiempo $n+1$, ya que es obtenida de forma explícita.

Para w, para un tiempo fijo $n \in \{0, \cdots N_k\}$, supongamos que $w_{i,j}^n = 0$ en (3.6), $C_{i,j} \in \Pi_h$, entonces

$$w_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t \mu}{h^2} \sum_{\sigma \in \varepsilon_{C_{i,j}}} F_{C_{i,j},\sigma}^{n+1} = 0 \tag{4.1}$$

Multiplicamos (4.1) por $w_{i,j}^{n+1}$ y sumando sobre todas las celdas de Ω, se tiene:

$$0 = \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} (w_{i,j}^{n+1})^2 + \frac{\Delta t \mu}{h^2} \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} \sum_{\sigma \in \varepsilon_{C_{i,j}}} F_{C_{i,j},\sigma}^{n+1} \cdot w_{i,}^{n+1} = \sum_{\sigma \in \varepsilon} (w_{i,j}^{n+1})^2 + \frac{\Delta t \mu}{h^2} \sum_{\sigma \in \varepsilon} ({w_{i,j}}^{n+1} - {w_D}^{n+1})^2,$$

Luego, al ser una suma de cuadrados igualados a cero, se concluye que $\overline{w}_{i,j}^{n+1} = 0$, $\forall C_{i,j} \in \Pi_h$. Esto prueba la existencia y unicidad de la solución $(\overline{w}_{i,j}^n)_{C_{i,j} \in \Pi_h}$ para (3.18a), ya que es un sistema lineal de dimensión finita con respecto a las incógnitas $\{\overline{w}_{i,j}^{n+1}, \forall C_{i,j} \in \Pi_h\}$, donde se tiene igual número de incógnitas y ecuaciones.

4.2. Positividad de la solución

Lema 4.2 *Si* $(u_{i,j}^n, w_{i,j}^n)$ *es una solución positiva del esquema de volúmenes finitos* (3.18a) - (3.18e) *, para toda celda* $C_{i,j} \in \Pi_h$*. Entonces* $(u_{i,j}^{n+1}, w_{i,j}^{n+1})$ *es positiva, para toda celda* $C_{i,j} \in \Pi_h$*, bajo la condición CFL* (3.17)*.*

Demostración:

Probaremos la positividad de la solución del esquema parabólico (3.18a). Este esquema se puede escribir en forma matricial como:

$$AW^{n+1} = W^n f^n \tag{4.2}$$

donde $W_{NM\times 1}^n = [w_{1,1}^n, w_{1,2}^n, w_{1,3}^n, \ldots, w_{1,M}^n, w_{2,1}^n, w_{2,2}^n, w_{2,M}^n, \ldots, w_{N,1}^n, w_{N,2}^n, \ldots, w_{N,M}^n]^T$ y la matriz $A_{NM\times NM}$ es una matriz estrictamente diagonal dominante, según la definición (**??**), luego tiene matriz inversa. Por teorema (2.7), los valores propios de A son reales positivos y utilizando el corolario (2.8) tenemos que A es una matriz definida positiva. Entonces, la matriz inversa $A^{-1} > 0$. Por hipótesis tenemos, $W^n > 0$, y por las condiciones del problema se sabe que f^n es positivo, para todo n,entonces $W^n f^n > 0$. Finalmente

$$W^{n+1} = A^{-1} W^n f^n > 0 \tag{4.3}$$

es decir, $w_{i,j}^{n+1} > 0$, para todo $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$.

Para $u_{i,j}^{n+1}$ se tiene

$$
\begin{aligned}
U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = {} & u_{i+1,j}^{n}\left[\frac{1}{8} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^{n}) - f(u_{i,j}^{n})}{u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}\right] + u_{i-1,j}^{n}\left[\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^{n}) - f(u_{i,j}^{n})}{u_{i-1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right] \\
& + u_{i,j}\left[\frac{3}{4} + \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^{n}) - f(u_{i,j}^{n})}{u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}\right. \\
& \left. -\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^{n}) - f(u_{i,j}^{n})}{u_{i-1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + \lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right].
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Observar que por la condición CFL (3.17)

$$
\frac{1}{8} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^{n}) - f(u_{i,j}^{n})}{u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \geq \frac{1}{8} - \frac{\lambda}{2} \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel \boldsymbol{v} \parallel_\infty > 0.
$$

Análogamente,

$$
\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^{n}) - f(u_{i,j}^{n})}{u_{i-1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \geq \frac{1}{8} - \frac{\lambda}{2} \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel \boldsymbol{v} \parallel_\infty > 0,
$$

además,

$$
\begin{aligned}
& \frac{3}{4} + \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^{n}) - f(u_{i,j}^{n})}{u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^{n}) - f(u_{i,j}^{n})}{u_{i-1,j}^{n} - u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + \lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \\
& \geq \frac{3}{4} - 3\lambda \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel \boldsymbol{v} \parallel_\infty > 0,
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que $U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$, lo que utilizamos como hipótesis para demostrar de la misma forma que $U_{i,j}^{n+1} \geq 0$. Finalmente considerando $S = \Delta t(\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta)$, se tiene que la parábola $1 + S + S^2 \geq 0$. Utilizando (3.18e) se obtiene la positividad de u para todo i, j y n

$$
u_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n+1}\left(1 + S + \frac{S^2}{2}\right) \geq 0.
$$

4.3. Acotamiento de la solución

4.3.1. Acotamiento L_∞ de w y u

Lema 4.3 *Consideremos **(S1)**,**(S2)** y **(S3)** verdaderas. Para todo n, la solución aproximada (u^n, w^n), definida en el esquema de volúmenes finitos* (3.18a)-(3.18e) *satisface*

$$\| w^n \|_\infty \leq e^{n\Delta t\gamma} \| w^0 \|_\infty \tag{4.5}$$

$$\| u^n \|_\infty \leq \| u^0 \|_\infty \exp\left((2\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)\frac{1}{\gamma} e^{(n+1)\Delta t\gamma} \right) \tag{4.6}$$

*donde $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ son constantes que sólo dependen de α, K (del supuesto **(S2)**), $\| w^0 \|_\infty$ y $\| \partial_u f \|_\infty$.*

Demostración:

Para w, sea $n \in \{0, 1, ..., N_k\}$, entonces definimos $w_{C_1}^{n+1} = \text{máx}\{w_{C_{i,j}}^{n+1}, C_{i,j} \in \Pi_h\}$ y escribiendo el esquema numérico de w, como en (3.18a), con $C_{i,j} = C_1$ se tiene:

$$w_{C_1}^{n+1} + \frac{\Delta t \mu}{h^2} \sum_{\sigma \in \varepsilon_{C_1}} F_{C_1,\sigma}^{n+1} = w_{C_1}^n \left[1 + \Delta t \left(\gamma - \delta u_{C_1}^n \right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\gamma - \delta u_{C_1}^n \right) \right) \right],$$

con $F_{C_1,\sigma}^n$ definido en (3.2), se tiene $F_{C_1,\sigma}^n \geq 0$, así

$$\begin{aligned} w_{C_1}^{n+1} &\leq w_{C_1}^n \left[1 + \Delta t \left(\gamma - \delta u_{C_1}^n \right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\gamma - \delta u_{C_1}^n \right) \right) \right] \\ &\leq w_{C_1}^n e^{\Delta t \left(\gamma - \delta u_{C_1}^n \right)} \\ &\leq w_{C_1}^n e^{\Delta t (\gamma)}. \end{aligned}$$

De forma inductiva se obtiene $w_{C_1}^n \leq w_{C_1}^0 e^{n\Delta t(\gamma)}$ lo que prueba que

$$\text{máx}\{w_{C_{i,j}}^n, C_{i,j} \in \Pi_h\} \leq \text{máx}\{w_{C_{i,j}}^0, C_{i,j} \in \Pi_h\} e^{n\Delta t(\gamma)} \Rightarrow \| w^n \|_{L_\infty} \leq \| w^0 \|_\infty e^{n\Delta t(\gamma)}$$

Para u, por el lema de la positividad se tiene $\left| U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right| = U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ y además $u_{i,j}^n \leq \| u \|_\infty$, para todo i, j y n, luego

$$
\begin{aligned}
U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{i+1,j}^{n}\left[\frac{1}{8}-\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^{n})-f(u_{i,j}^{n})}{u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}\right]+u_{i-1,j}^{n}\left[\frac{1}{8}+\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^{n})-f(u_{i,j}^{n})}{u_{i-1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right]\\
&+u_{i,j}\left[\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^{n})-f(u_{i,j}^{n})}{u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}-\lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}\right.\\
&\left.-\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^{n})-f(u_{i,j}^{n})}{u_{i-1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}+\lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right]\\
&\leq\| u^{n} \|\left[\frac{1}{8}-\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^{n})-f(u_{i,j}^{n})}{u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}+\frac{1}{8}+\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^{n})-f(u_{i,j}^{n})}{u_{i-1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right.\\
&\left.+\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i+1,j}^{n})-f(u_{i,j}^{n})}{u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}-\lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}-\frac{\lambda}{2}\frac{f(u_{i-1,j}^{n})-f(u_{i,j}^{n})}{u_{i-1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}+\lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right]\\
&\leq\| u^{n} \|\left[1-\lambda\frac{f(u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}\left(\boldsymbol{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}-\boldsymbol{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}\right)\right]\\
&\leq\| u^{n} \|\left(1+\Delta t\,\| \partial_u f \|_\infty \| \partial_x \boldsymbol{v}^{n+1} \|_\infty\right)\\
&\leq\| u^{n} \|\exp\left(\Delta t K\,\| \partial_u f \|_\infty \| \partial_x w^{n+1} \|_\infty\right), \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

utilizando el supuesto **(S2)**, donde teníamos $\| \nabla \boldsymbol{v}^n \|_\infty \leq K \| w^n \|_\infty$. Análogamente, se obtiene la cota L_∞ para $U_{i,j}^{n+1}$,

$$
\| U^{n+1} \|_\infty \leq \| U^{n+\frac{1}{2}} \|_\infty \, exp\left(\Delta t K \| \partial_u f \|_\infty \| w^{n+1} \|_\infty\right), \qquad (4.8)
$$

usando la ecuación (3.18e) y acotando por la función exponencial y su norma,

$$
\left|u_{i,j}^{n+1}\right| \leq U_{i,j}^{n+1}\exp\left[\Delta t\left(\alpha w_{i,j}^{n+1}-\beta\right)\right] \leq \| U^{n+1} \|_\infty \exp\left(\Delta t \alpha \| w^{n+1} \|_\infty\right),
$$

usando (4.7)

$$
\| u^{n+1} \|_\infty \leq \| U^{n+\frac{1}{2}} \|_\infty \exp\left(\Delta t \| w^{n+1} \|_\infty \left(K \| \partial_u f \|_\infty + \alpha\right)\right),
$$

y por (4.8)

$$
\| u^{n+1} \|_\infty \leq \| u^{n} \|_\infty \exp\left(\Delta t \| w^{n+1} \|_\infty \left(2K \| \partial_u f \|_\infty + \alpha\right)\right).
$$

Utilizando la cota para w (4.5) obtenemos

$$\| u^{n+1} \|_\infty \leq \| u^n \|_\infty \exp\left(\Delta t e^{(n+1)\Delta t\gamma \| w^0 \|_\infty} (2K \| \partial_u f \|_\infty + \alpha)\right).$$

Finalmente, usando inducción sobre n

$$\| u^{n+1} \|_\infty \leq \| u^0 \|_\infty \exp\left((2\kappa_1 + \kappa_2)\frac{1}{\gamma} e^{(n+1)\Delta t\gamma}\right),$$

con

$$\kappa_1 = K \| w^0 \|_\infty \| \partial_u f \|_\infty, \qquad \kappa_2 = \alpha \| w^0 \|_\infty$$

4.3.2. Acotamiento L_1 de w y u

Lema 4.4 *Consideremos* ***(S1)***,***(S2)*** *y* ***(S3)*** *verdaderas. Para todo n la solución aproximada (u^n, w^n), definida en el esquema de volúmenes finitos* (3.18a)-(3.13) *satisface*

$$\| w^n \|_1 \leq e^{n\Delta t\gamma} \| w^0 \|_1 \tag{4.9}$$

$$\| u^n \|_1 \leq \| u^0 \|_1 \exp\left(\mathcal{K}_2 \frac{1}{\gamma} e^{(n+1)\Delta t\gamma}\right) \tag{4.10}$$

donde $\mathcal{K}_2$ es la constante definida en el lema anterior, que sólo depende de α y $\| w^0 \|_\infty$.

Demostración:

Para w, multiplicamos (3.18a) por h^2 y sumamos sobre Ω, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h^2 w_{i,j}^{n+1} + \Delta t\mu \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{\sigma\in\varepsilon_{C_{i,j}}} F_{C_{i,j},\sigma}^{n+1} &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h^2 w_{i,j}^{n} \left[1 + \Delta t \left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right)\right)\right] \\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h^2 w_{i,j}^{n} e^{(\gamma - \delta u_{i,j}^n)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h^2 w_{i,j}^{n} e^{\gamma}\end{aligned}$$

Notar que $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{\sigma\in\varepsilon_{C_{i,j}}} F_{C_{i,j},\sigma}^{n+1} = 0$, por las condiciones de frontera. Finalmente, utilizando inducción con respecto a n, se obtiene el resultado deseado:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h^2 w_{i,j}^{n+1} \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} h^2 w_{i,j}^{n} e^{\gamma} \Longrightarrow \| w^{n+1} \|_1 \leq e^{\gamma} \| w^n \|_1 \Longrightarrow \| w^n \|_1 \leq e^{n\gamma} \| w^0 \|_1.$$

Para u, por la propiedad de conservación del esquema de Lax Friedrichs (3.18b)-(3.18e) se tiene

$$\| U^{n+1} \|_1 = \| U^{n+\frac{1}{2}} \|_1 = \| u^n \|_1$$

Consideramos (3.18e), obteniendo

$$\begin{aligned} \| u^{n+1} \|_1 &= \sum_{i,j} h^2 u_{i,j}^{n+1} \leq \sum_{i,j} h^2 e^{\Delta t(\alpha w_{i,j}^{n+1} - \beta)} U_{i,j}^{n+1} \\ &\leq e^{\Delta t \alpha \| w^{n+1} \|_\infty} \sum_{i,j} h^2 U_{i,j}^{n+1} \\ &= e^{\Delta t \alpha \| w^{n+1} \|_\infty} \| u^n \|_1 . \end{aligned}$$

Terminamos la demostración, usando (4.5) y la constante κ_2 definida en el lema anterior, donde se tiene

$$\| u^{n+1} \|_1 \leq \| u^0 \|_1 \exp\left(\kappa_2 \frac{1}{\gamma} e^{(n+2)\Delta t \gamma} \right).$$

4.4. TV estimate

Lema 4.5 *Para todo n, $n\Delta t < T$, la solución aproximada (u^n, w^n) definida en el esquema de volúmenes finitos* (3.13) - (3.18a) *satisface,*

$$TV(u^n) + TV(w^n) \leq e^{n\Delta t \mathcal{K}_3} \left(TV(u^0) + TV(w^0) + \frac{\mathcal{K}_4}{\mathcal{K}_3} e^{\Delta t \mathcal{K}_5} \right)$$

*donde las funciones $\mathcal{K}_i$, $i = 3, 4, 5$ dependen sólo de T, normas de u^n, w^n y $\partial_u f$ y de las constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y K y de la función C definida en **(S2)**.*

A continuación encontraremos una cota para la variación total de w^{n+1}, basándonos en algunas demostraciones de [1]. Debemos estimar

$$TV(w^{n+1}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} h\left[\left|w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j}\right| + \left|w^{n+1}_{i,j+1} - w^{n+1}_{i,j}\right|\right]$$

Para simplificar la notación, definimos $S^n_{i,j} = \gamma - \delta u^n_{i,j}$.

Para encontrar una cota de $TV(w^{n+1})$, primero acotaremos $\left|w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j}\right|$, para esto:

$$\begin{aligned}
w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j} &= w^n_{i+1,j}\left[1 + \Delta t S^n_{i+1,j}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}S^n_{i+1,j}\right)\right] - w^n_{i,j}\left[1 + \Delta t S^n_{i,j}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}S^n_{i,j}\right)\right]\\
&+ \frac{\Delta t\mu}{h^2}\left[w^{n+1}_{i+2,j} + w^{n+1}_{i,j} + w^{n+1}_{i+1,j+1} + w^{n+1}_{i+1,j-1} - 4w^{n+1}_{i+1,j}\right.\\
&\qquad \left. - w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i-1,j} - w^{n+1}_{i,j+1} - w^{n+1}_{i,j-1} + 4w^{n+1}_{i,j}\right]\\
\Rightarrow \left(w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j}\right) &= w^n_{i+1,j}\left[1 + \Delta t S^n_{i+1,j}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}S^n_{i+1,j}\right)\right] - w^n_{i,j}\left[1 + \Delta t S^n_{i,j}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}S^n_{i,j}\right)\right]\\
&+ \frac{\Delta t\mu}{h^2}\left[(w^{n+1}_{i+2,j} - w^{n+1}_{i+1,j}) + (w^{n+1}_{i,j} - w^{n+1}_{i-1,j})\right.\\
&+ \left.(w^{n+1}_{i+1,j+1} - w^{n+1}_{i,j+1}) + (w^{n+1}_{i+1,j-1} - w^{n+1}_{i,j-1})\right]\\
&- \frac{4\Delta t\mu}{h^2}(w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j}).
\end{aligned}$$

Aplicando valor absoluto y la propiedad de desigualdad triangular, entre otras, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{4\Delta t\mu}{h^2}\right)\left|(w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j})\right| \leq &\left|w^n_{i+1,j}\left[1 + \Delta t S^n_{i+1,j}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}S^n_{i+1,j}\right)\right]\right.\\
&- \left. w^n_{i,j}\left[1 + \Delta t S^n_{i,j}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}S^n_{i,j}\right)\right]\right|\\
&+ \frac{\Delta t\mu}{h^2}\left[\left|w^{n+1}_{i+2,j} - w^{n+1}_{i+1,j}\right| + \left|w^{n+1}_{i,j} - w^{n+1}_{i-1,j}\right|\right.\\
&+ \left.\left|w^{n+1}_{i+1,j+1} - w^{n+1}_{i,j+1}\right| + \left|w^{n+1}_{i+1,j-1} - w^{n+1}_{i,j-1}\right|\right].
\end{aligned}$$

Sumando sobre todos los $i, j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{4\Delta t\mu}{h^2}\right)\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|\left(w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j}\right)\right| \leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} &\left|w^n_{i+1,j}\left[1 + \Delta t S^n_{i+1,j}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}S^n_{i+1,j}\right)\right]\right.\\
&- \left. w^n_{i,j}\left[1 + \Delta t S^n_{i,j}\left(1 + \frac{\Delta t}{2}S^n_{i,j}\right)\right]\right|\\
&+ \frac{4\Delta t\mu}{h^2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j}\right|.
\end{aligned}$$

Utilizando el Lema (4.3.1), sabemos que $w_{i,j}^n \leq \| w^n \|_\infty$ y $u_{i,j}^n \leq \| w^n \|_\infty$, así se obtiene

$$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|\left(w_{i+1,j}^{n+1} - w_{i,j}^{n+1}\right)\right| \leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|w_{i+1,j}^n - w_{i,j}^n\right| + \Delta t \| w^n \|_\infty \delta e^{(\Delta t\gamma + \Delta t\delta\|u^n\|_\infty)} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n\right|. \tag{4.11}$$

(Ver detalles en Anexo A).

Análogamente, se obtiene que :

$$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|\left(w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j}^{n+1}\right)\right| \leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|w_{i,j+1}^n - w_{i,j}^n\right| + \Delta t \| w^n \|_\infty \delta e^{(\Delta t\gamma + \Delta t\delta\|u^n\|_\infty)} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n\right| \tag{4.12}$$

sumando (4.11) con (4.12), obtenemos una cota para la variación total de la solución de w:

$$\begin{aligned}
TV(w^{n+1}) &\leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|w_{i+1,j}^n - w_{i,j}^n\right| + \Delta t \| w^n \|_\infty \delta e^{(\Delta t\gamma + \Delta t\delta\|u^n\|_\infty)} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n\right| \\
&\quad + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|w_{i,j+1}^n - w_{i,j}^n\right| + \Delta t \| w^n \|_\infty \delta e^{(\Delta t\gamma + \Delta t\delta\|u^n\|_\infty)} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} h\left|u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n\right| \\
&= TV(w^n) + \Delta t \| w^n \|_\infty \delta e^{(\Delta t\gamma + \Delta t\delta\|u^n\|_\infty)} TV(u^n) && (4.13) \\
&\leq e^{\Delta t\gamma}\left(TV(w^n) + \Delta t \| w^n \|_\infty \delta e^{(\Delta t\delta\|u^n\|_\infty)} TV(u^n)\right). && (4.14)
\end{aligned}$$

Ahora para u, necesitamos estimar lo siguiente:

Variación total para u^{n+1}

$$\begin{aligned}
TV(u^{n+1}) &= \sum_{i,j} h\left[\left|u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}\right| + \left|u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}\right|\right] \\
&\leq e^{\Delta t\alpha} \| w^{n+1} \|_\infty \left(TV\left(U^{n+1}\right) + \Delta t\alpha e^{\Delta t\beta} \| U^{n+1} \|_\infty TV\left(w^{n+1}\right)\right),
\end{aligned}$$

Variación total para U^{n+1}

$$TV\left(U^{n+1}\right) = \sum_{i,j} h\left(\left|U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}\right| + \left|U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}\right|\right)$$

Como sabemos el esquema Lax-Friedrichs estándar es TVD y se cumple que $TV(U^{n+1}) \leq TV(U^{n+\frac{1}{2}}) \leq TV(u^n)$. En este caso la situación es diferente, pues el flujo no solo depende de u, sino que también de t y $\mathbf{x}$, a través del término no local $\boldsymbol{v}(w)$. Por lo tanto, la ley de conservación no satisface la propiedad TVD. Para estimar el incremento en la variación total debido al campo de velocidad dependiente del espacio y tiempo consideramos el término $\sum_{i,j} h\left|U_{i,j+1}^{n+1}-U_{i,j}^{n+1}\right|$. Por (3.18d)

$$\begin{aligned}
U_{i,j+1}^{n+1}-U_{i,j}^{n+1} = {} & U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}-U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& -\lambda\left[F\left(U_{i,j+2}^{n+\frac{1}{2}},U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}},(n+1)\Delta t,x_{i,j+\frac{3}{2}}\right)-F\left(U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}},U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},(n+1)\Delta t,x_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\right. \\
& \left.-F\left(U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}},U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},(n+1)\Delta t,x_{i,j+\frac{1}{2}}\right)-F\left(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},U_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}},(n+1)\Delta t,x_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Sumando y restando $\lambda F\left(U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}},U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},(n+1)\Delta t,x_{i,j+\frac{3}{2}}\right)+\lambda F\left(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}},U_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}},(n+1)\Delta t,x_{i,j+\frac{1}{2}}\right)$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$U_{i,j+1}^{n+1}-U_{i,j}^{n+1}=A_{i,j}^{n}-B_{i,j}^{n}.$$

Utilizando la definición del flujo hiperbólico (3.18b) obtenemos:

$$\begin{aligned}
A_{i,j}^{n} = {} & \frac{3}{4}(U_{i,j+1}-U_{i,j})+(U_{i,j+2}-U_{i,j+1})\left(\frac{1}{8}-\frac{\lambda}{2}\frac{f(U_{i,j+2})-f(U_{i,j+1})}{U_{i,j+2}-U_{i,j+1}}\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{3}{2}}\right) \\
& +(U_{i,j}-U_{i,j-1})\left(\frac{1}{8}+\frac{\lambda}{2}\frac{f(U_{i,j})-f(U_{i,j-1})}{U_{i,j}-U_{i,j-1}}\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)-\frac{\lambda}{2}\left[f(U_{i,j+1})-f(U_{i,j})\right]\left(\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{3}{2}}-\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Sumando el módulo de $A_{i,j}^{n}$ sobre todo i,j, usando **(S2)**, y el acotamiento infinito de las soluciones, tenemos:

$$\sum_{i,j}h\left|A_{i,j}^{n}\right|\leq\sum_{i,j}h\left|U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}-U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right|\left(1+\Delta tK\parallel\partial_{u}f\parallel_{\infty}\parallel w^{n+1}\parallel_{\infty}\right). \tag{4.15}$$

Para $B_{i,j}^{n}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
B_{i,j}^{n} = {} & \frac{\lambda}{2}\left[f(U_{i,j})\left(\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1}-2\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}+\boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right)\right. \\
& \left.+\left(f(U_{i,j+1})-f(U_{i,j-1})\right)\left(\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1}-\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right)+f(U_{i,j-1})\left(\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1}-2\boldsymbol{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}+\boldsymbol{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Usando **(S2)**, sumando el modulo de $B_{i,j}^{n}$ sobre todo i,j y multiplicando por h, se obtiene:

$$\sum_{i,j}h\left|B_{i,j}^{n}\right|\leq\Delta t\parallel\partial_{u}f\parallel_{\infty}\left(K\parallel w^{n+1}\parallel_{\infty}\sum_{i,j}h\left|U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}-U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right|C\left(\parallel w^{n+1}\parallel_{\infty}\right)\parallel u^{n}\parallel_{1}\right) \tag{4.16}$$

Por (4.15) y (4.16) se obtiene:

$$\sum_{i,j} h \left| U_{i,j+1}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1} \right| \leq \sum_{i,j} h \left| U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right| \left(1 + \Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right)$$
$$+ \Delta t \parallel \partial_u f \parallel_\infty C\left(\parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right) \parallel u^n \parallel_1 . \tag{4.17}$$

De forma similar se obtiene:

$$\sum_{i,j} h \left| U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1} \right| \leq \sum_{i,j} h \left| U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right| \left(1 + \Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right)$$
$$+ \Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty \sum_{i,j} h \left| U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right|$$
$$+ 2\Delta t \parallel \partial_u f \parallel_\infty C\left(\parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right) \parallel u^n \parallel_1 . \tag{4.18}$$

Por (4.17) y (4.18) se tiene la variación total para U^{n+1}

$$TV(U^{n+1}) \leq \left(1 + 3\Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right) TV(U^{n+\frac{1}{2}}) + 3\Delta t \parallel \partial_u f \parallel_\infty C\left(\parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right) \parallel u^n \parallel_1 .$$

Análogamente la variación total para $U^{n+\frac{1}{2}}$ es:

$$TV(U^{n+\frac{1}{2}}) \leq \left(1 + 3\Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right) TV(u^n) + 3\Delta t \parallel \partial_u f \parallel_\infty C\left(\parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right) \parallel u^n \parallel_1 .$$

De donde se obtiene la variación total de u^{n+1},

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) \leq e^{\Delta t \alpha \|w^{n+1}\|_\infty} &\left\{ \exp\left(6\Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right) TV(u^n) \right. \\ &+ \Delta t \alpha e^{\Delta t \beta} \parallel u^{n+1} \parallel_\infty TV(w^{n+1}) \\ &\left. + \ 3\Delta t \parallel \partial_u f \parallel_\infty C(\parallel w^{n+1} \parallel_\infty) \parallel u^n \parallel_{L^1} [1 + \exp(3\Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty)] \right\} . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Finalmente, para encontrar la variación total de la solución del sistema (u^n, w^n) dada en el esquema numérico (3.13)-(3.18a), sumamos (4.13) y (4.19), obteniendo:

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) + TV(w^{n+1}) &\leq e^{\Delta t \alpha \|w^{n+1}\|_\infty} \left\{ \exp\left(6\Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty\right) TV(u^n) \right. \\ &\quad + \Delta t \alpha e^{\Delta t \beta} \parallel u^{n+1} \parallel_\infty TV(w^{n+1}) \\ &\quad \left. + \ 3\Delta t \parallel \partial_u f \parallel_\infty C(\parallel w^{n+1} \parallel_\infty) \parallel u^n \parallel_{L^1} [1 + \exp(3\Delta t K \parallel \partial_u f \parallel_\infty \parallel w^{n+1} \parallel_\infty)] \right\} \\ &\quad + e^{\Delta t \gamma} \left(TV(w^n) + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \delta e^{(\Delta t \delta \|u^n\|_\infty)} TV(u^n) \right) \qquad (4.20) \\ &\leq e^{\Delta t K_1} TV(u^n) + e^{\Delta t K_2} TV(w^n) + \Delta t K_3 e^{\Delta t K_4} \qquad (4.21) \end{aligned}$$

Donde K_1, K_2, K_3 y K_4 son funciones que sólo dependen de la norma de u^n, w^{n+1} y $\partial_u f$, así como de todas las constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y K definida en **(S2)**. Definiendo $\mathcal{K}_3 = \text{máx}\{K_1, K_2\}$, $\mathcal{K}_4 = K_3$ y $\mathcal{K}_5 = K_4$ y usando inducción sobre n

$$TV(u^{n+1}) + TV(w^{n+1}) \leq e^{n\Delta t\mathcal{K}_3}[TV(u^0) + TV(w^0) + \frac{\mathcal{K}_4}{\mathcal{K}_3} e^{\Delta t\mathcal{K}_5}]$$

4.5. Lipschitz continuidad en el tiempo

Lema 4.6 *Asumiendo **(S1)**,**(S2)** y **(S3)** verdaderas, entonces para todo n, la solución aproximada (u^n, w^n) definida por el esquema numérico* (3.13)-(3.18a) *es tal que, para cualquier $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1\Delta t \leq T$ y $n_2\Delta t \leq T$, cumple*

$$\| u^{n_1} - u^{n_2} \|_1 \leq |n_1 - n_2|\Delta t\mathcal{K}_6(T,t),$$

*donde la función $\mathcal{K}_6(T,t)$ es uniformemente acotada para todo $n \leq \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y depende de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, K$ en varias normas de $u, w, \partial_u f$, en la variación total de la condición inicial y del mapa C definida en **(S2)**.*

Demostración:

Por el lema (4.3.1) u^n es uniformemente acotada por alguna constante que depende de T. Bajo los supuestos **(S1)** y **(S2)** se garantiza la Lipschitz continuidad de la función de flujo numérico definida en (3.18b). Usando (3.18c) y (3.18d), podemos concluir

$$\| U^{n+1} - u^n \|_1 \leq \sum_{i,j} h^2 \left(\left| U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n \right| \right)$$

Usando (3.18c) y (3.18d)

$$\begin{aligned} \| U^{n+1} - u^n \|_1 \leq \sum_{i,j} h \Bigg[& \left| F\left(U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}, U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, (n+1)\Delta t, x_{i,j+\frac{1}{2}}\right) - F\left(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, U_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}, (n+1)\Delta t, x_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \right| \\ & + \left| F\left(u_{i+1,j}^n, u_{i,j}^n, (n+1)\Delta t, x_{i+\frac{1}{2},j}\right) - F\left(u_{i,j}^n, u_{i-1,j}^n, (n+1)\Delta t, x_{i-\frac{1}{2},j}\right) \right| \Bigg] \end{aligned}$$

Bajo los supuestos **(S1)** y **(S2)** se garantiza la Lipschitz continuidad de la función de flujo numérico definida en (3.18b), entonces con constante de Lipschitz L se tiene

$$\begin{aligned}\| U^{n+1}-u^{n} \|_1 &\leq \Delta t\cdot 2L\sum_{i,j} h\left(\left|U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+1}-U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}\right|+\left|u^n_{i+1,j}-u^n_{i,j}\right|+\left|\boldsymbol{v}^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-\boldsymbol{v}^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}\right|+\left|\boldsymbol{v}^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}}\right|\right)\\
&\leq \Delta t\cdot 2L\left(\left(2+3\Delta t K \| \partial_u f \|_\infty \| w^{n+1} \|_\infty\right) TV(u^n) + \| \nabla \boldsymbol{v}^{n+1} \|_1\right.\\
&\quad \left. +3\Delta t \| \partial_u f \|_\infty C\left(\| w^{n+1} \|_\infty\right) \| u^n \|_1\right)\end{aligned}$$

Incluyendo el término fuente definido en (3.18e) y sea T tal que $\max\{n_1,n_2\}\Delta t \leq T < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}\| u^{n+1}-u^n \|_1 &\leq \sum_{i,j} h^2|U^{n+1}_{i,j}-u^n_{i,j}| + \Delta t\sum_{i,j} h^2|U^{n+1}_{i,j}|\left|(\alpha w^{n+1}_{i,j}-\beta)\left(1+\frac{\Delta t}{2}(\alpha w^{n+1}_{i,j}-\beta)\right)\right|\\
&\leq \| U^{n+1}-u^n \|_1 + \Delta t\alpha \| U^{n+1} \|_1 \| w^{n+1} \|_\infty e^{\Delta t\alpha \| w^{n+1} \|_\infty}\\
&\leq \Delta t \kappa_6(T,\Delta t),\end{aligned}$$

donde κ_6 es uniformemente acotada para todo $n \leq \max\{n_1,n_2\}$ y todo Δt finito.

4.6. Convergencia

Teorema 4.7 *Supongamos que se cumplen* ***(S1)****,* ***(S2)*** *,* ***(S3)*** *y* $0 \leq T < \infty$*. Si* $((h)_k,(\Delta t)_k)$ *es una sucesión tal que* $(h)_k \to 0$ *y* $(\Delta t)_k \to 0$*, cuando* $k\to\infty$ *y* $\lambda = \frac{(\Delta t)_k}{h_k}$ *cumple la condición CFL*

$$\lambda \| \partial_u f \|_{L^\infty} \| v \|_{L^\infty} < \frac{1}{4},$$

entonces existe una subsucesión $(u^n_{h_k}, w^n_{h_k})$ *que converge a la única solución débil* (u,w) *de* (1.3)*. Más precisamente* $(u^n_{h_k})$ *converge en* $\boldsymbol{L}^1_{loc}$ *y* $(w^n_{h_k})$ *converge débil * en* $\boldsymbol{L}^\infty$*.*

Por la subsección (4.3.1) se tiene que w_k y u_k son acotadas en L^∞, de modo que la sucesión (u_k,w_k) está acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^2\times[0,T];\mathbb{R}^2)$, esto implica la existencia de una subsucesión (u_{k_h},w_{k_h}) que converge en la topología débil * en $L^\infty(\mathbb{R}^2\times[0,T];\mathbb{R}^2)$, por el teorema (2) a (u,w).

Por otra parte, por la subsección (4.3.2) se tiene que u_{k_h} también es uniformemente acotada en $L^1(\mathbb{R}^2\times[0,T];\mathbb{R}^2)$, además por la sección (4.4) y la propiedad Lipchitz del lema (4.6), proporcionan un límite uniforme para la variación total en espacio-tiempo para u_{k_h} definido por:

$$TV_T(u_{k_h}) = \sum_{n=0}^{N_T}\left[\Delta t TV(u^n_{k_h}) + \|u^{n+1}_{k_h}-u^n_{k_h}\|\right].$$

Aplicando el teorema (2.6) se deduce la existencia de $\overline{u} \in BV_{loc}(\mathbb{R}^2 \times [0,T];\mathbb{R})$ y una subsucesión de (u_{k_h}), todavía denotada por (u_{k_h}) tal que

$$u_{k_h} \longrightarrow \overline{u} \quad en \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times [0,T];\mathbb{R}), \tag{4.22}$$

$$u_{k_h}(x,y,t) \longrightarrow \overline{u}(x,y,t) \quad para\ c.t.p. \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T]. \tag{4.23}$$

Por la unicidad del límite de $\overline{u}$ en L^1, podemos concluir la convergencia de toda sucesión (u_{k_h}) a $\overline{u}$. De (4.23) se sigue que (u_{k_h}) también converge a $\overline{u}$ en $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0,T];\mathbb{R})$. Como la convergencia fuerte, implica la convergencia débil *, obtenemos que $u_{k_h} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}$ en $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0,T];\mathbb{R})$. Debido a la unicidad del límite débil *, tenemos $u = \overline{u}$.

Como $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$, la continuidad de la función f implica ahora que

$$f(u_k) \longrightarrow f(u) \tag{4.24}$$

Por (4.3.1), se nos proporciona

$$\| w_k(t,\cdot,\cdot) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})} \leq e^{T\gamma} \| w^0 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})}, \quad c.t.p. \quad t \in [0,T],$$

por lo que podemos encontrar una subsucesión que converge en la topología débil * en $L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ c.t.p. $t \in [0,T]$ y debido a la unicidad del límite débil *, se tiene

$$w_{k_h}(\cdot,\cdot,t) \overset{*}{\rightharpoonup} w(\cdot,\cdot,t).$$

Como $\eta \in L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, podemos decir ahora que $(w_{k_h} * \eta)(\cdot,\cdot,t)$ converge fuertemente a $(w*\eta)(\cdot,\cdot,t)$ en $L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ c.t.p. $t \in [0,T]$. Por **(S2)**, se tiene que la constante de Lipschitz está acotada y así obtenemos $\boldsymbol{v}(w_{k_h} * \eta) \longrightarrow \boldsymbol{v}(w*\eta)$ en $L^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ c.t.p. $t \in [0,T]$.

Para probar que (u,w) es una solución débil del problema (1.3), elegimos las funciones test $\psi \in \mathbf{C}^1_c(\mathbf{C}^2_c(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}),[0,T])$ y $\varphi \in \mathbf{C}^1_c(\mathbb{R}^2 \times [0,T];\mathbb{R})$.

Para w, multiplicamos (3.18a) por h^2 y $\psi^n_{i,j} = \psi(x_{i,j}, n\Delta t)$ y sumando sobre todo $n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ y $C_{i,j} \in \Pi_h$ obtenemos $A + B = C$ donde:

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{C_{i,j}\in\Pi_h} h^2 \left(w^{n+1}_{i,j} - w^n_{i,j}\right) \psi(x_{i,j}, n\Delta t) \to -\int_0^T \int_\Omega w(\mathbf{x},t)\psi_t(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}dt - \int_\Omega w_0(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},0)d\mathbf{x}$$

cuando $h \to 0$. (Ver anexo B)

$$B = -\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \mu \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} \sum_{\sigma \in C_{i,j}} \left(w_\sigma^{n+1} - w_{i,j}^{n+1} \right) \psi(x_{i,j}, n\Delta t) \to -\mu \int_0^T \int_\Omega w(\mathbf{x}, t) \triangle \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$$

cuando $h \to 0$ (Ver anexo C).

Para $C = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} h^2 \psi(x_{i,j}, n\Delta t)(\gamma - \delta u(x_{i,j}, n\Delta t) \left(1 + \frac{\Delta t}{2}(\gamma - \delta u(x_{i,j}, n\Delta t) \right)$, se tiene

$$C \to \int_0^T \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, t)(\gamma - \delta u(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} dt$$

Finalmente, de $A + B = C$ obtenemos

$$\int_0^T \int_\Omega \left(w(\mathbf{x}, t)\psi_t(\mathbf{x}, t) + \mu w(\mathbf{x}, t) \triangle \psi(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t)(\gamma - \delta u(\mathbf{x}, t)) \right) d\mathbf{x} dt + \int_\Omega w_0(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = 0 \tag{4.25}$$

Para u, primero reemplazamos (3.18c) y (3.18d) en (3.18e). A continuación, multiplicamos la ecuación obtenida por la función test $h^2 \varphi_{i,j}^n$ y sumando sobre todo n, i y j obtenemos

$$0 = A + B + C + D \tag{4.26}$$

donde A se define como sigue, y si se reordena la sumatoria y se aplica límite cuando $h \to 0$ y $\Delta t \to 0$, se obtiene

$$A = h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} (u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n+1}) \varphi_{i,j}^n = \Delta t h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} u_{i,j}^n \frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \to \int_0^T \int_\Omega u \partial_t \varphi d\mathbf{x} dt.$$

El término B queda definido por

$$\begin{aligned} B = &-h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} \lambda \left[(F\left(u_{i+1,j}^n, u_{i,j}^n, (n+1)\Delta t, x_{i+\frac{1}{2},j} \right) - (F\left(u_{i,j}^n, u_{i-1,j}^n, (n+1)\Delta t, x_{i-\frac{1}{2},j} \right) \right] \varphi_{i,j}^n \\ &- h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} \lambda \left[(F\left(U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}, U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, (n+1)\Delta t, x_{i,j+\frac{1}{2}} \right) - (F\left(U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, (n+1)\Delta t, x_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \right] \varphi_{i,j}^n. \end{aligned}$$

Utilizando la definición del flujo de (3.18b) y reordenando las sumatorias obtenemos

$$
\begin{aligned}
B &= \Delta t h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} \frac{1}{2} f(u^n_{i,j}) \left(\frac{\varphi^n_{i,j} - \varphi^n_{i-1,j}}{h} \boldsymbol{v}^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{\varphi^n_{i+1,j} - \varphi^n_{i,j}}{h} \boldsymbol{v}^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} \right) \\
&+ \Delta t h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} \frac{1}{2} f(U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}) \left(\frac{\varphi^n_{i,j} - \varphi^n_{i,j-1}}{h} \boldsymbol{v}^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{\varphi^n_{i,j+1} - \varphi^n_{i,j}}{h} \boldsymbol{v}^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \\
&+ h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} \frac{h^2}{4} \left(u^n_{i,j} \frac{\varphi^n_{i-1,j} - 2\varphi^n_{i,j} + \varphi^n_{i+1,j}}{h^2} + U^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} \frac{\varphi^n_{i,j-1} - 2\varphi^n_{i,j} + \varphi^n_{i,j+1}}{h^2} \right).
\end{aligned}
$$

Aplicando límite cuando $h \to 0$ y $\Delta t \to 0$, se obtiene

$$B \to \int_0^T \int_\Omega f(u) \boldsymbol{v} \cdot div(\varphi) d\mathbf{x} dt$$

Los últimos términos C y D quedan definidos como sigue, y al igual que los anteriores se aplica límite cuando $h \to 0$ y $\Delta t \to 0$, obteniendo

$$C = \Delta t h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} (\alpha w^n_{i,j} - \beta) U^{n+1}_{i,j} \varphi^n_{i,j} \to \int_0^T \int_\Omega u(\alpha w - \beta) \varphi d\mathbf{x} dt,$$

$$D = \Delta t h^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j} \frac{\Delta t}{2} (\alpha w^n_{i,j} - \beta)^2 U^{n+1}_{i,j} \varphi^n_{i,j} \to 0,$$

de donde se tiene finalmente

$$\int_0^T \int_\Omega \left(u(\mathbf{x},t) \psi_t(\mathbf{x},t) + f(u(\mathbf{x},t)) \boldsymbol{v} div(\varphi) + (\alpha w(\mathbf{x},t) - \beta) \varphi \right) d\mathbf{x} dt = 0. \tag{4.27}$$

De (4.25) y (4.27), hemos probado que (u, w) es la única solución débil del problema (1.3), según las definiciones (2.1) y (2.2).

Capítulo 5

Ejemplos Numéricos

En este capítulo revisaremos los ejemplos numéricos que muestran la convergencia del esquema propuesto (3.18), el cual aproxima la solución de (1.3). Además mostraremos una interpretación biológica del problema. Por otro lado, haremos una comparación del esquema propuesto Implícito-Explícito, con respecto al totalmente explícito propuesto en [16].

Para todos los ejemplos que presentamos en el capítulo, utilizamos las siguientes condiciones.

Condición inicial:

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= 4\chi_A(x,y) \\ w_0(x,y) &= 3(2y-1)\,\text{máx}\{0, h(x,y)\}\chi_B(x,y), \end{aligned}$$

definida en el dominio D dado por:

$$\begin{aligned} &h(x,y) = (4x-1)^2 + (4y-2)^2 - 0{,}25 \\ &A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (8x-2)^2 + (1{,}25(4y-1))^2 \leq 1\} \\ &B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0{,}5\}. \end{aligned}$$

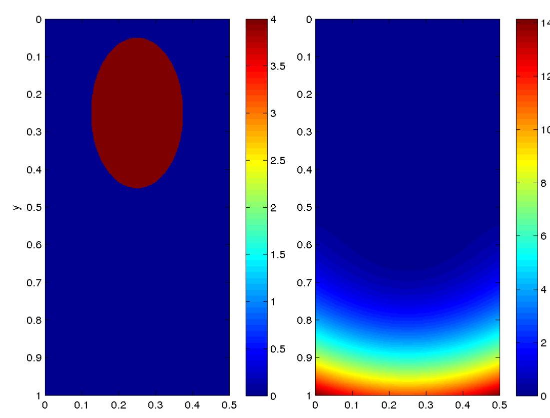

Figura 5.1: Condición inicial

Las condiciones de frontera, definidas para todo $(u,w) \in C_{i,j}$, tal que $C_{i,j} \notin \Omega$, se obtienen como un reflejo de la soluciones en Ω, es decir en la dirección de X, tenemos

$$(u_{i,j}, w_{i,j}) = \begin{cases} (u_{1-i,j}, w_{1-i,j}) & \text{si} \quad i \leq 0 \\ (u_{M+1-a,j}, w_{M+1-a,j}) & \text{si} \quad i = M+a, \qquad a \geq 1. \end{cases}$$

Análogamente, en la dirección de Y tenemos,

$$
(u_{i,j}, w_{i,j}) = \begin{cases} (u_{i,1-j}, w_{i,1-j}) & \text{si} \quad j \leq 0 \\ (u_{i,N+1-b}, w_{i,N+1-b}) & \text{si} \quad j = N + b, \quad b \geq 1. \end{cases}
$$

Para el término de convolución $\boldsymbol{v}(w)$, definido en (1.2), se considera el parámetro ϵ positivo, que representa la distancia máxima de los depredadores u en la presencia de las presas w.

Ejemplo 5.1 *El objetivo de este ejemplo, es comparar el tiempo computacional utilizado por el esquema ImEx* (3.18)*, con respecto al esquema explícito de [16]. Bajo los parámetros*

$$
\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \kappa = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2, \quad \mu = 0{,}5, \quad \epsilon = 0{,}02,
$$

con $\Omega = [0, 0{,}5] \times [0, 1]$*, tiempo máximo* $T = 0{,}4$*,* $f(u) = u$ *y* $\| \partial_u f \|_\infty = 1$.

Usando el Método del Gradiente Conjugado Precondicionado para resolver sistema de ecuaciones implícito, se obtienen los siguientes resultados:

h	Método	Tiempo CPU	$u_{\text{máx}}$	$w_{\text{máx}}$
0.004	ImEx	241.10	3.3805	2.3424
	Explícito	292.64	3.3601	2.3161
0.002	ImEx	2550.75	3.6454	2.3922
	Explícito	3436.55	3.6261	2.3274
0.001	ImEx	38498.94	4.0168	2.9501
	Explícito	53898.51	4.0007	2.9038

Cuadro 5.1: Tiempo CPU para el Ejemplo 5.1.

Del cuadro 5.1 podemos comparar el tiempo CPU al aplicar el Método Explícito y Método Implícito-Explícito. De estos resultados podemos concluir que el tiempo CPU es menor utilizando un esquema ImEx, siempre y cuando se resuelva de manera adecuada el sistema de ecuaciones que se genera con el método ImEx, para el ejemplo se utilizó el método del Gradiente Conjugado Precondicionado, lo que permite obtener un mejor tiempo computacional. Además se puede observar que las soluciones que entregan ambos esquemas numéricos, son muy similares, por lo que ambos métodos son comparables.

Ejemplo 5.2 *La finalidad de este ejemplo, es mostrar que la solución de* (1.3)*, según estos resultados numéricos continúa siendo positiva, aún cuando el término de reacción lo aproximamos con el método de Euler de orden uno a diferencia de utilizar método de Taylor, es decir utilizamos las aproximaciones siguientes para el término de reacción, en la ecuación hiperbólica:*

$$1 + \Delta t \left(\gamma - \delta u_{i,j}^{n}\right).$$

Utilizamos los siguientes parámetros:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \kappa = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2, \quad \mu = 0{,}05, \quad \epsilon = 0{,}02,$$

$\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $T_{\text{máx}} = 0{,}1$, $f(u) = 1(1-u)$ *y* $\| \partial_u f \|_\infty = 0{,}2 \leq 1$.

Dado que la solución exacta de (1.3) no se puede calcular, tomaremos como referencia la solución (u, w) calculada para $h = 0{,}00125$. Así, sea la solución numérica calculada (u_h, w_h) asociada al tamaño de paso h, el error es calculado por

$$\| u_h - u \|_1 = \sup_{t \in [0,T]} \| u_h(t) - u(t) \|_1$$

$$\| w_h - w \|_1 = \sup_{t \in [0,T]} \| w_h(t) - w(t) \|_1 .$$

Dada esta definición, los resultados obtenidos en el ejemplo son

h	Método Explícito		Método ImEx	
	$\| u_h - u \|_{L^1}$	$\| w_h - w \|_{L^1}$	$\| u_h - u \|_{L^1}$	$\| w_h - w \|_{L^1}$
0,02	$1{,}76e^{-2}$	$4{,}35e^{-3}$	$1{,}38e^{-2}$	$7{,}75e^{-4}$
0,01	$5{,}45e^{-3}$	$4{,}11e^{-3}$	$9{,}99e^{-4}$	$2{,}40e^{-4}$
0,005	$2{,}95e^{-3}$	$3{,}39e^{-5}$	$7{,}72e^{-5}$	$2{,}16e^{-4}$

Cuadro 5.2: Error para Método Explícito y el método ImEx para el ejemplo 5.2.

Esto nos muestra, que la aproximación de orden 2 es necesaria sólo para la demostración del Lema de la positividad de la solución, pero los resultados numéricos no nos muestran, que utilizando aproximación de orden 1, nos dé alguna solución negativa.

Además, el ejemplo muestra la disminución del error a medida que refinamos la malla en ambos métodos, lo cual es evidente en el cuadro 5.2.

Ejemplo 5.3 *Con el objetivo de visualizar el comportamiento de las soluciones, aplicamos el Método ImEx* (3.18)*, considerando los siguientes parámetros*

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \kappa = 1, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 2, \quad \mu = 0{,}1, \quad \epsilon = 0{,}04$$

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{u^2}{1728}(10-u)^3 & si \quad 0 \leq u \leq 10 \\ 0 & si \quad e.o.c. \end{cases}$$

$\Omega = [0, 0{,}5] \times [0, 1]$ *,* $T_{\text{máx}} = 6$*,* $h = 0{,}002$ *y* $\| \partial_u f \|_\infty = 0{,}79 \leq 1$*.*

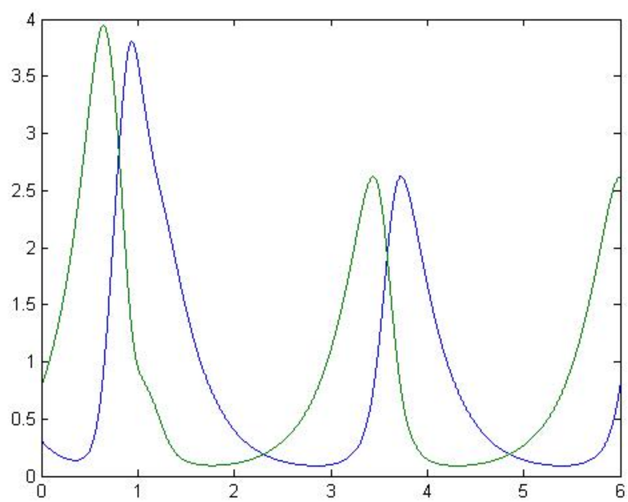

Figura 5.2: Comportamiento de las soluciones para el ejemplo 5.3, w en verde y u en azul.

En la figura 5.2 se muestra el comportamiento de las soluciones, donde se tiene que en el tiempo inicial hay una gran cantidad de presas, en comparación con los depredadores, a medida que el tiempo avanza estos se van alimentando de las presas, por lo que llega a un punto que existe igual cantidad de ambos. Como los depredadores se siguen alimentando de las presas, estas disminuyen aún más, tendiendo a desaparecer. Este comportamiento es cíclico, por lo que después por la poca cantidad de presas que existen, empiezan a desaparecer los depredadores, ya que no tienen con que alimentarse, y nuevamente las presas comienzan a reproducirse y por consiguiente a aumentar.

Por la figura 5.3 Se puede observar que a medida que el tiempo va avanzando los depredadores, observando a su alrededor se mueven en dirección a donde existe mayor densidad de presas, para ir en su dirección. Mientras que las presas empiezan a ocupar todo el dominio donde se encuentran.

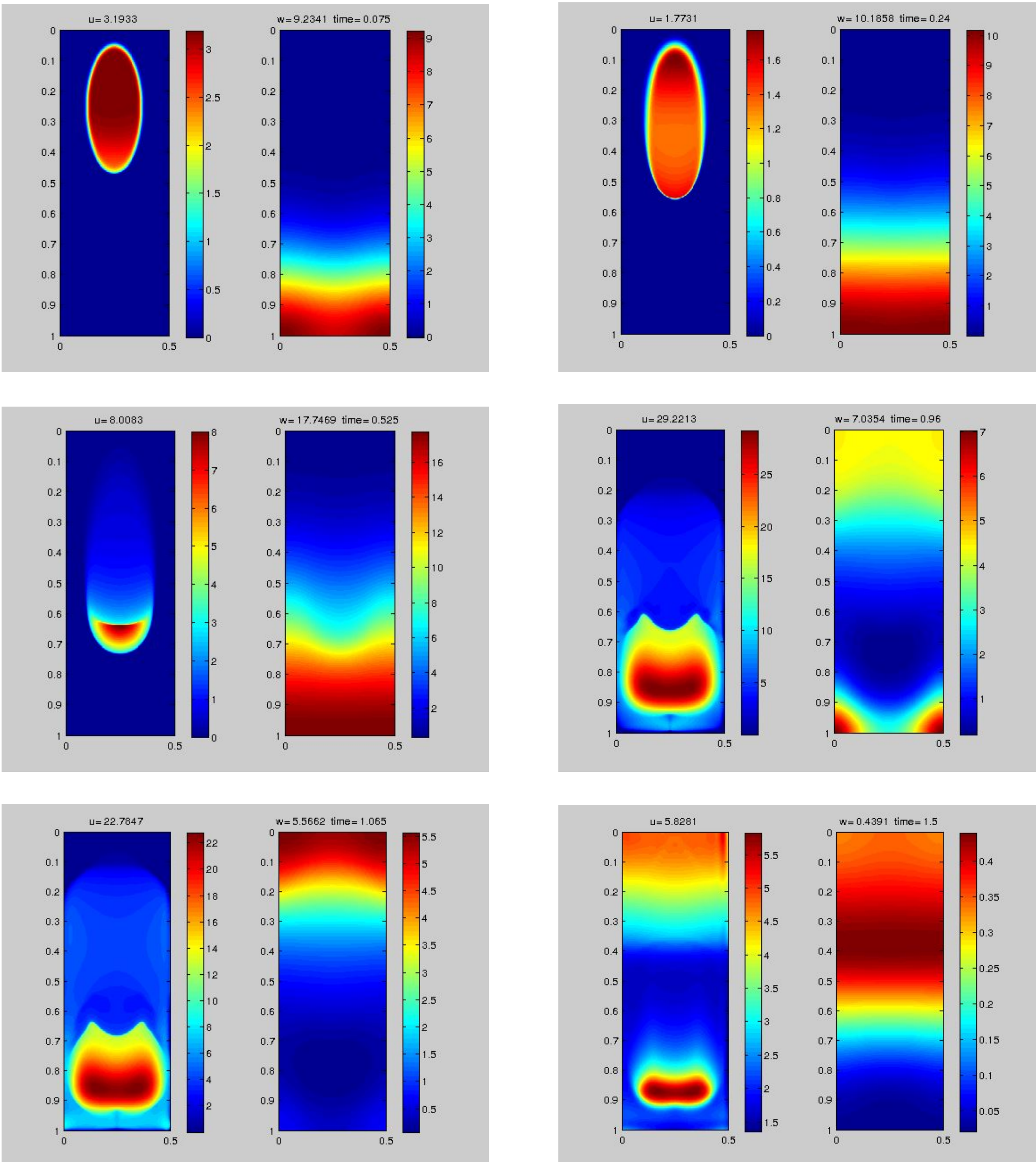

Figura 5.3: Al lado izquierdo de cada imagen se muestran los depredadores u y a la derecha las presas para el ejemplo 5.3. La barra de la derecha indica la densidad de cada grupo, mientras más café es el color, muestra mayor densidad de la población correspondiente.

Ejemplo 5.4 *El último ejemplo es una variante del modelo presentado durante el trabajo, considerando*

$$\boldsymbol{v}(w,u) := \boldsymbol{v}(w * \eta) - \boldsymbol{v}(u * \eta).$$

Consideramos los siguientes parámetros:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \kappa = 1, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 2, \quad \mu = 0{,}1, \quad \epsilon = 0{,}04$$

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{u^2}{1728}(10-u)^3 & si \quad 0 \leq u \leq 10 \\ 0 & si \quad e.o.c. \end{cases}$$

$\Omega = [0, 0{,}5] \times [0, 1]$, $T_{\text{máx}} = 6$, $h = 0{,}002$ *y* $\| \partial_u f \|_\infty = 0{,}79 \leq 1$.

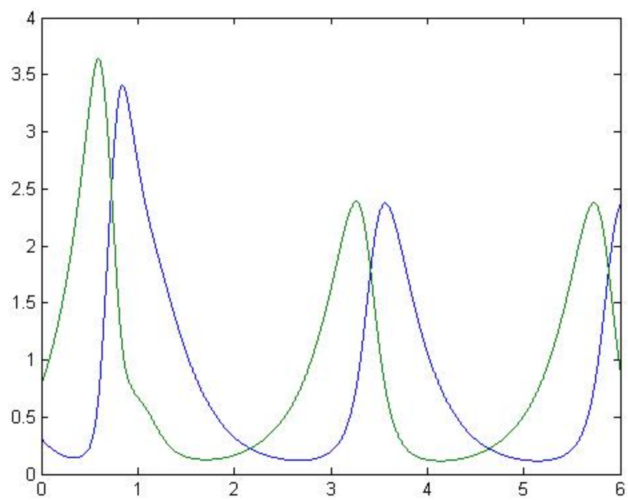

Figura 5.4: Comportamiento de las soluciones para el ejemplo 5.4, w en verde y u en azul.

Al igual que el el ejemplo 5.3, se puede observar en la Figura 5.4 que el comportamiento de las soluciones es similar a pesar que los depredadores formen grupos.

La variante del término $\boldsymbol{v}(w,u)$ nos indica que los depredadores, además de ir en dirección hacia donde hay mayor densidad de presas, también observarán donde hay mayor densidad de depredadores para ir en dirección contraria a ellos, lo que va generando que se formen grupos de depredadores para ir en busca de las presas, como se observa en la figura 5.5.

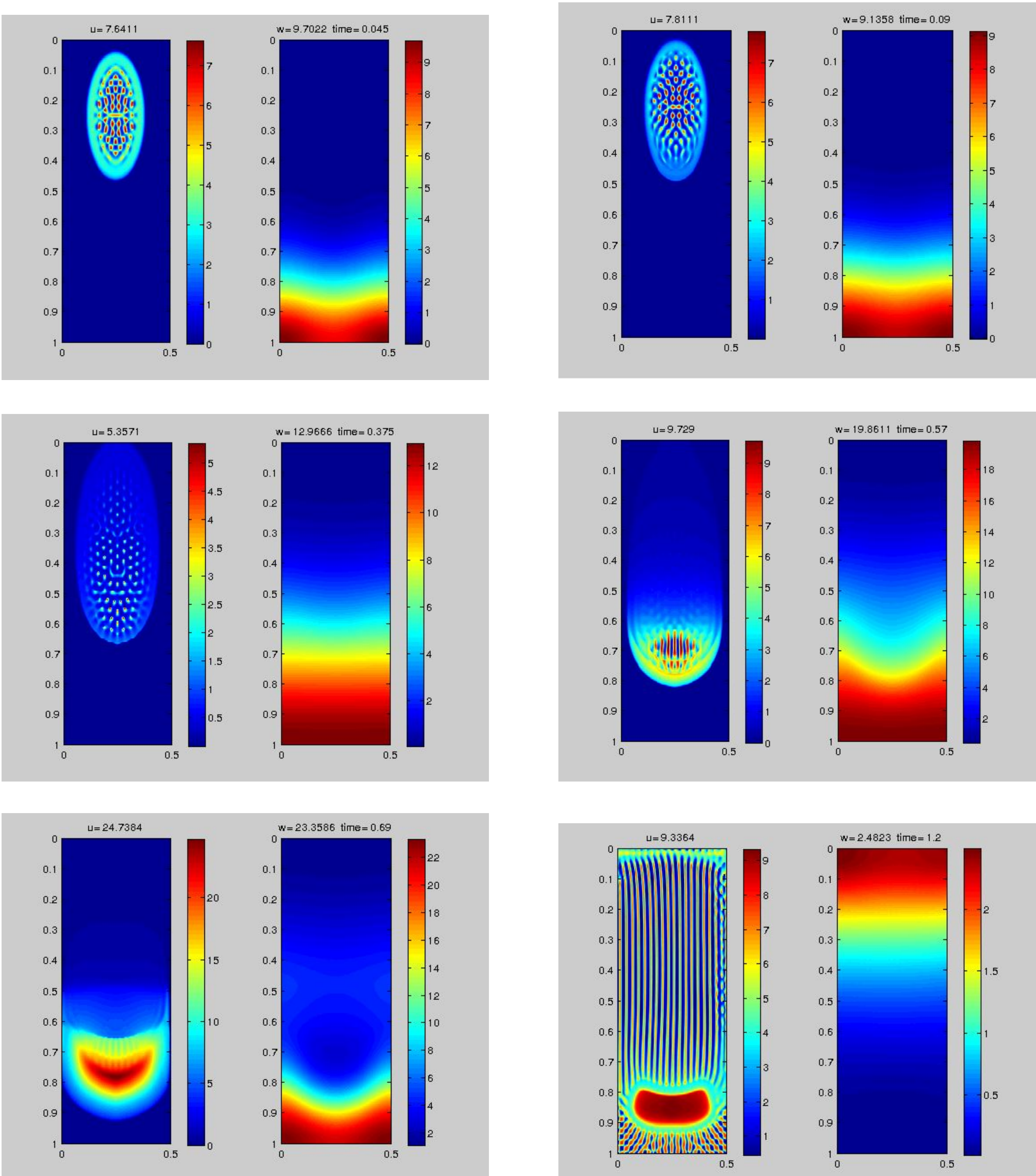

Figura 5.5: Al lado izquierdo de cada imagen se muestran los depredadores u que ahora van formando grupos, ya que se repelen entre sí y además van en dirección hacia donde hay mayor densidad de presas y a la derecha las presas w, para el ejemplo 5.4. La barra de la derecha indica la densidad de cada grupo, mientras más café es el color, muestra mayor densidad de la población correspondiente.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

En este trabajo, se ha probado la convergencia del esquema Implícito-Explícito propuesto en (3.18) , para resolver el problema mixto parabólico-hiperbólico no-local (1.3). Para demostrar la convergencia, fue necesario demostrar la positividad de la solución, siendo necesario aproximar el termino de reacción mediante Taylor de orden 2, con la expresión

$$\left[1 + \Delta t \left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right)\right)\right].$$

Sin embargo, para algunos test numéricos se utilizó en su reemplazo el término

$$\left[1 + \Delta t \left(\gamma - \delta u_{i,j}^n\right)\right],$$

donde se observó que en ninguna instancia las soluciones dan negativas, por lo que es suficiente con este término para este tipo de pruebas.

Se ha mostrado la eficiencia del esquema numérico ImEx (3.18), desde el punto de vista del tiempo computacional necesario para aproximar la solución de (1.3). La eficiencia del esquema depende del método a utilizar para la resolución del sistema de ecuaciones que se forma al aproximar con el método implícito. En nuestro caso el método del gradiente conjugado fue de gran utilidad para ahorrar tiempo computacional.

El esquema que se propuso es la base para que en un futuro se puedan obtener esquemas de alto orden: discretización WENO para la parte hiperbólica y discretización ImEx-RK para el esquema completo. Además el método propuesto puede ser aplicado a otros modelos de tipo hiperbólico no locales.

Anexo A

TV Estimate

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|\left(w^{n+1}_{i+1,j} - w^{n+1}_{i,j}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left| w^n_{i+1,j}\left[1+\Delta t S^n_{i+1,j}\left(1+\frac{\Delta t}{2}S^n_{i+1,j}\right)\right] - w^n_{i,j}\left[1+\Delta t S^n_{i,j}\left(1+\frac{\Delta t}{2}S^n_{i,j}\right)\right]\right| \\
&\leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| \\
&\quad + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \Delta t \left|\left(S^n_{i+1,j}w^n_{i+1,j} - S^n_{i,j}w^n_{i,j}\right) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left(\left(S^n_{i+1,j}\right)^2 w^n_{i+1,j} - \left(S^n_{i,j}\right)^2 w^n_{i,j}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left(\left|S^n_{i+1,j} - S^n_{i,j}\right| + \frac{\Delta t}{2}\left|\left(S^n_{i+1,j}\right)^2 - \left(S^n_{i,j}\right)^2\right|\right) \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|S^n_{i+1,j} - S^n_{i,j}\right|\left(1+\frac{\Delta t}{2}\left|S^n_{i+1,j} + S^n_{i,j}\right|\right) \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| \\
&\quad + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|\gamma - \delta u^n_{i+1,j} - \gamma + \delta u^n_{i,j}\right|\left(1+\frac{\Delta t}{2}\left|\gamma - \delta u^n_{i+1,j} + \gamma - \delta u^n_{i,j}\right|\right) \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \delta\left|u^n_{i+1,j} - u^n_{i,j}\right|\left(1+\frac{\Delta t}{2}\left|2\gamma - \delta\left(u^n_{i+1,j} + \delta u^n_{i,j}\right)\right|\right) \\
&\leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \delta\left|u^n_{i+1,j} - u^n_{i,j}\right|\left(1+\frac{\Delta t}{2}\left(|2\gamma| + 2\delta \parallel u^n \parallel_\infty\right)\right) \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \left(1+\frac{\Delta t}{2}\left(2\gamma + 2\delta \parallel u^n \parallel_\infty\right)\right)\delta \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|u^n_{i+1,j} - u^n_{i,j}\right| \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \left(1+\Delta t\left(\gamma + \delta \parallel u^n \parallel_\infty\right)\right)\delta \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|u^n_{i+1,j} - u^n_{i,j}\right| \\
&\leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|w^n_{i+1,j} - w^n_{i,j}\right| + \Delta t \parallel w^n \parallel_\infty \delta e^{(\Delta t\gamma + \Delta t\delta\|u^n\|_\infty)} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|u^n_{i+1,j} - u^n_{i,j}\right|.
\end{aligned}
$$

Anexo B

Término A de convergencia

Podemos reescribir el término $A = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} h^2 \left(w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n \right) \psi(n\Delta t, x_{i,j})$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A = & \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} h^2 w_{i,j}^n \left(\psi((n-1)\Delta t, x_{i,j}) - \psi(n\Delta t, x_{i,j}) \right) \\ & + \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} h^2 \left(w_{i,j}^N \psi((N-1)\Delta t, x_{i,j}) - w_{i,j}^0 \psi(0, x_{i,j}) \right) \end{aligned}$$

Por (4.3.1) se deduce que $|w_{i,j}^N| \leq e^{T\Delta t\gamma} \|w^0\|_\infty$, $\forall C_{i,j} \in \Pi_h$. Dado que $0 < T - (N-1)\Delta t \leq \Delta t$, por el teorema del valor medio, existe una constante $C_{1,\psi}$ que sólo depende de ψ, T y Ω, tal que $|\psi((N-1)\Delta t, x_{i,j})| \leq \Delta t C_{1,\psi}$ y en consecuencia $\sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} h^2 \left(w_{i,j}^N \psi((N-1)\Delta t, x_{i,j}) \right) \longrightarrow 0$ cuando $\Delta t \longrightarrow 0$.

Dado que $\left\| \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} w_{i,j}^0 \chi_{i,j} - w_0 \right\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$, cuando $h \longrightarrow 0$, donde $\chi_{i,j}$ es la función característica y recordando de la función test ψ está definida en $C_c^1([0,T], C_c^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}))$, entonces se tiene que $\sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} h^2 \left(w_{i,j}^0 \psi(0, x_{i,j}) \right) \longrightarrow 0$ cuando $h \longrightarrow 0$.

Dado que $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a w, cuando $k \longrightarrow +\infty$, para la tolopogía débil *, entonces cuando $h \to 0$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} h^2 w_{i,j}^n \left(\psi((n-1)\Delta t, x_{i,j}) - \psi(n\Delta t, x_{i,j}) \right) \to - \int_0^T \int_\Omega w(t,x) \psi_t(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt$$

de donde, cuando $h \to 0$,

$$A \to -\int_0^T \int_\Omega w(t,\mathbf{x})\psi_t(t,\mathbf{x})d\mathbf{x}dt.$$

Anexo C

Termino B de Convergencia

Podemos reescribir el término $B = -\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \mu \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} \sum_{\sigma \in C_{i,j}} \left(w_\sigma^{n+1} - w_{i,j}^{n+1} \right) \psi(n\Delta t, x_{i,j})$ como sigue:

$$B = -\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \mu \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}} h \left(w_\sigma^{n+1} - w_{i,j}^{n+1} \right) \frac{\psi(n\Delta t, x_{i,j}) - \psi(n\Delta t, x_D)}{h}.$$

Introducimos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} B' &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_\Omega w_{i,j} \triangle \psi(n\Delta t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{C_{i,j} \in \Pi_h} w_{i,j}^{n+1} \int_{C_{i,j}} \triangle \psi(n\Delta t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}} (w_{i,j}^{n+1} - w_\sigma^{n+1}) \int_\sigma \bigtriangledown \psi(n\Delta t, \mathbf{x}) \mathbf{n}_{c_{i,j}|D} d\gamma(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

como la sucesión (w_k) converge a w en $L^1((0,T) \times \Omega)$ y además es acotada en L^∞, la integral entre T y $N\Delta t$ tiende a 0 y además $B' \to \int_0^T \int_\Omega w(t, \mathbf{x}) \triangle \varphi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt$, cuando $\Delta t \to 0$.

Así $B + B'$ lo escribimos como

$$\begin{aligned} &- \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \mu \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}} h(w_\sigma^{n+1} - w_{i,j}^{n+1}) \frac{\psi(n\Delta t, x_{i,j}) - \psi(n\Delta t, x_D)}{h} \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}} (w_{i,j}^{n+1} - w_\sigma^{n+1}) \int_\sigma \nabla \psi(n\Delta t, \mathbf{x}) \mathbf{n}_{C_{i,j}|D}) d\gamma(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \mu \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}} (w_{i,j}^{n+1} - w_\sigma^{n+1}) R_{C_{i,j}|D}^n, \end{aligned}$$

donde $R^n_{C_{i,j}|D} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_\sigma \nabla\psi(n\Delta t, \mathbf{x})\mathbf{n}_{C_{i,j}|D})d\gamma(\mathbf{x}) - \dfrac{\psi(n\Delta t, x_D) - \psi(n\Delta t, x_{i,j})}{h}$, gracias a las propiedades de la función ψ existe una constante $C\psi$, que sólo depende de ψ, tal que $\left|R^n_{C_{i,j}|D}\right| \leq C\psi h$, por lo que podemos concluir que $B + B' \to 0$, cuando $h \to 0$,

$$B \to -\mu \int_0^T \int_\Omega w(t, \mathbf{x}) \bigtriangleup \psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt.$$

Bibliografía

[1] **Afif, M., & Amaziane, B.** (2002). *On convergence of finite volume schemes for one-dimensional two-phase flow in porous media.* Journal of computational and applied mathematics, 145(1), 31-48.

[2] **Arditi, R., & Ginzburg, L. R.** (1989). *Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence.* Journal of theoretical biology, 139(3), 311-326.

[3] **Bartlett, M. S.** (1957). *On theoretical models for competitive and predatory biological systems.* Biometrika, 44(1/2), 27-42.

[4] **Brézis, H., & Funcional, A.** (1984). *Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial.

[5] **Burden, R. L. F., Burden, J. D. L., & Faires, J. D.** (2002). *Análisis numérico.* Chapter 5: Initial-Value Problems for Ordinary Differential Equations. Thomson Learning,.

[6] **Colombo, R. M., Marcellini, F., & Rossi, E.** (2016). *Biological and industrial models motivating nonlocal conservation laws: A review of analytic and numerical results.* NHM, 11(1), 49-67. ISO 690

[7] **Colombo, R. M., & Rossi, E.** (2014). *Hyperbolic predators vs parabolic preys.* arXiv preprint arXiv:1402.2099.

[8] **Dafermos, C. M.** (2005). *Hyberbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, 295-300.

[9] **Eymard, R., Gallouët, T., & Herbin, R.** (2000). *Finite volume methods.* Handbook of numerical analysis, 7, 713-1018.

[10] **Fekete, I., & Faragó, I.**(2010). *Numerical methods for the linear algebraic systems with M-matrices.*

[11] **Holling, C. S.** (1959). *The Components of Predation as Revealed by a Study of Small-Mammal Predation of the European Pine Sawfly1.* The Canadian Entomologist, 91(5), 293-320.

[12] **LeVeque, R. J.** (1990). *Conservative Methods for Nonlinear Problems. In Numerical Methods for Conservation Laws* (pp. 122-135). Birkhäuser Basel.

[13] **LeVeque, R. J.** (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems* (Vol. 31). Cambridge university press.

[14] **Rossi, E.** (2016). *A mixed hyperbolic-parabolic system to describe predator-prey dynamics.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 47(2), 701-714.

[15] **Rossi, E., & Schleper, V.** (2016). *Convergence of a numerical scheme for a mixed hyperbolic-parabolic system in two space dimensions.* ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 50(2), 475-497.

[16] **Shu, C. W.** (1998). *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws.* In Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations (pp. 325-432). Springer Berlin Heidelberg.

[17] **Varga, R. S.** (2009). *Matrix iterative analysis* (Vol. 27). Springer Science & Business Media.