



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

**FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA**

Análisis Numérico de Modelos de Vigas

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío.

Felipe Andrés Lepe Araya

Concepción, Marzo 2013.

Análisis Numérico de Modelos de Vigas

por

Felipe Andrés Lepe raya

Directores de Tesis: Prof. David Mora, Universidad del Bío-Bío, Chile.

Prof. Rodolfo Rodríguez, Universidad de Concepción, Chile.

Director de Programa: Prof. Ricardo Castro, Universidad del Bío-Bío, Chile

COMISIÓN EXAMINADORA

Prof. Erwin Hernández

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile

Prof. David Mora

Universidad del Bío- Bío, Chile

Prof. Ricardo Oyarzúa

Universidad del Bío- Bío, Chile

Análisis Numérico de Modelos de Vigas.

Felipe Andrés Lepe Araya

Universidad del Bío-Bío

Marzo 2013

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a mi profesor guía David Mora por toda la paciencia, dedicación y llamadas de atención que me hizo mientras me hizo clases dentro del magíster, como también mientras duró este período de investigación. Su apoyo me fue fundamental, y aprendí mucho trabajando con él. Sin duda conocí un gran investigador y persona.

Quiero dar un especial agradecimiento al Profesor Rodolfo Rodríguez por haber aceptado la co-dirección de esta tesis, por sus correcciones y sugerencias que ayudaron a que este trabajo llegara a un buen fin.

Gracias a todos los profesores que me hicieron clases mientras fui alumno del programa, en especial a Ricardo Oyarzúa, que siempre tuvo una gran disposición para ayudarme cuando tenía dudas, y me entregó ánimo cuando la frustración se hacía presente. También agradezco a Claudio Vidal, por su preocupación como jefe del DMAT.

También le doy gracias a mis amigos del magíster, especialmente a Jhon, Felipe, Sergio y Jaime, a mis amigos de Los Ángeles que siempre estaban pendientes de lo que me ocurría. A Carlos Carteau por su hospitalidad durante los dos primeros años de magíster.

También le agradezco al Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI²MA) de la Universidad de Concepción, y al Proyecto Basal PFB 03 del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile que ayudaron en el financiamiento de este trabajo.

Finalmente, gracias a mi familia. Mi abuela, madre y hermanos. Gracias por cuidarme desde lejos, y a la familia Vargas Prosser por su cariño y apoyo durante mi primera etapa de estudios.

Índice general

1. Introducción	5
2. Teoría de Vigas	7
2.1. Modelos de Vigas	7
2.1.1. Modelo de Euler-Bernoulli	9
2.1.2. Modelo de Timoshenko	12
2.1.3. Modelo de Reddy-Bickford	14
3. Método de elementos finitos libre de bloqueo para una formulación de momento de flexión de vigas Timoshenko.	19
3.1. Modelo de la Viga de Timoshenko	19
3.2. Esquema Mixto Discreto	27
3.3. Resultados Numéricos.	32
4. Conclusiones y Trabajo Futuro	50

Resumen

En el presente trabajo de tesis tiene como objetivo el análisis de un problema de vigas regidas por las ecuaciones del modelo de Timoshenko, donde la viga a estudiar la consideramos no homogénea en su dominio.

Todo este trabajo lo organizaremos de la siguiente manera:

En el capítulo dos damos a conocer los tres modelos más estudiados en la teoría de vigas, haciendo énfasis en las diferencias entre dichos modelos, indicando las cantidades físicas involucradas y las respectivas ecuaciones diferenciales que los gobiernan, mostrando cómo la naturaleza en que podemos encontrar una viga determina las condiciones de contorno que dichas ecuaciones diferenciales tendrán asociadas.

En el tercer capítulo mostraremos algunos resultados importantes que usamos en la tesis, pertenecientes a [1], en especial, un teorema asociado a la regularidad de solución para el problema de la viga homogénea, que muestra la no dependencia del grosor de la viga, y considerando como variable auxiliar solamente el esfuerzo de corte.

Finalmente, el cuarto capítulo corresponde al resultado principal logrado en esta tesis, en el que se considera el estudio de una viga empotrada no homogénea. Analizaremos una formulación variacional mixta que involucra como variables el desplazamiento, la rotación, el esfuerzo de corte y el momento flector. Analizaremos el problema discreto asociado al continuo con elementos finitos clásicos, donde veremos que el grosor de la viga no depende de la convergencia de dicho método y por lo tanto el fenómeno de bloqueo que suelen provocar este tipo de parámetros no afecta en el cálculo de error. Mostraremos un orden de convergencia lineal en términos del tamaño de la malla, y un orden cuadrático en las normas L^2 del esfuerzo de corte y el momento flector. Entregaremos además algunas pruebas numéricas hechas con

el programa Matlab que verifican los resultados teóricos obtenidos.

Capítulo 1

Introducción

Las vigas son objetos que se usan en toda la ingeniería estructural, como en la construcción de puentes, edificios, automóviles, aviones, etc. Estas vigas tienen la capacidad de ser elásticas, y al aplicarles alguna fuerza externa, sufren deformaciones que afectan en las estructuras que éstas forman. Es por esto que es de vital importancia conocer cómo afectan estas fuerzas externas, para predecir los desplazamientos y determinar la resistencia que deben tener estas estructuras en la práctica.

Existen diversas maneras de modelar una viga, sin embargo, hay tres teorías que son las más estudiadas : la de Euler-Bernoulli, Timoshenko y Reddy-Bickford. El modelo de la viga de Euler-Bernoulli, data del siglo 18 y es el más antiguo entre los tres nombrados. El modelo de Timoshenko, es más contemporánea y data del siglo 20, y por último el de Reddy-Bickford aparece en la década de los noventa. En particular, en este trabajo abordaremos el modelo de Timoshenko, cuya relevancia recae en que el grosor de la viga no es despreciable (a diferencia de Euler-Bernoulli por ejemplo). Es por eso que éste modelo es de gran interés.

El hecho de considerar el grosor de la viga dentro del modelo, lleva a un fenómeno numérico conocido como *bloqueo*, estudiado rigurosamente en [1], y luego aplicado en distintos problemas de ingeniería, como en [5, 6, 7, 11, 12, 13, 14], donde se demuestra que ciertos métodos de elementos finitos son convergentes, independientes del grosor de la viga, y por lo tanto están *libres de bloqueo*.

En este trabajo estudiaremos la aproximación numérica del momento flector de una viga no homogénea modelada por las ecuaciones de Timoshenko, considerando una formulación

mixta que involucre el momento flector, como también el esfuerzo de corte. Esta aproximación es análoga a la usada en [2] para las placas Reissner-Mindlin. No obstante, el carácter unidimensional del problema estudiado en esta tesis facilita las demostraciones en un contexto mas general.

Analizaremos la existencia y unicidad del problema usando la teoría clásica de Babuška-Brezzi, donde probaremos una condición inf-sup y elipticidad que serán independientes del grosor. Para efectos de la aproximación numérica, usaremos elementos finitos clásicos, donde para aproximar el momento flector y el corte usaremos funciones lineales a trozos y continuas, y para aproximar el desplazamiento transversal y la rotación de las fibras usaremos las funciones constantes a trozos.

Además presentamos resultados de regularidad adicional y de convergencia, tanto lineal como cuadrática para la aproximación del desplazamiento y rotación, y el momento flector y esfuerzo de corte respectivamente.

Capítulo 2

Teoría de Vigas

2.1. Modelos de Vigas

Una viga es un objeto estructural tridimensional, cuyas características más significativas son la de ser elástica, y de que una de sus dimensiones siempre es mayor que las otras dos. La propiedad de elasticidad de la viga, hace que cuando se le aplica una carga produce un fenómeno llamado flexión. Esta flexión produce tensiones o esfuerzos que son de gran interés de estudio para los ingenieros y constructores, ya que les permite conocer bajo qué condiciones una viga puede soportar ciertas cargas, sin que ésta colapse.

En la práctica, las vigas pueden ser de distintos materiales, como acero, hierro, madera etc. y también de distintas formas, por lo que las propiedades físicas y geométricas de estos objetos también son de interés, ya que también influyen en los análisis estructurales.

En este capítulo, veremos algunos de los modelos clásicos de vigas, usados comúnmente en aplicaciones de ingeniería. Estos modelos son el de Euler-Bernoulli (EBT), Timoshenko (TBT) y de Reddy-Bickford (RBT), los cuales podemos encontrar en [20].

Haremos énfasis en las diferencias que tienen estos modelos entre sí, ya sea en su planteamiento, definiciones y condiciones de frontera.

Antes de detallar los modelos de vigas, definiremos algunos conceptos previos asociados a este estudio:

- (a) Energía de Deformación: Es el aumento de energía interna acumulado en el interior de

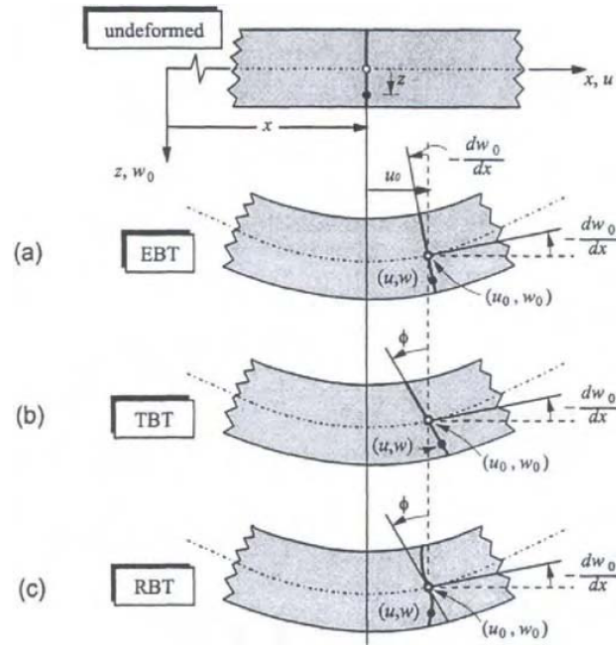


Figura 2.1: Modelos de vigas

un sólido deformable como resultado del trabajo realizado por las fuerzas que provocan la deformación.

- (b) **Energía Potencial Elástica:** La energía elástica o energía de deformación es el aumento de energía interna acumulada en el interior de un sólido deformable como resultado del trabajo realizado por las fuerzas que provocan la deformación.
- (c) **Principio del Trabajo Virtual:** Es un método utilizado en resistencia de materiales para el cálculo de desplazamientos reales en cierta estructura (en este caso, una viga)
- (d) **Fuerza de Corte:** Es el esfuerzo interno o resultante de las tensiones paralelas a la sección transversal de una viga.
- (e) **Momento Flector:** Es un momento de fuerza resultante de una distribución de tensiones sobre una sección transversal de una viga flexionada.
- (f) **Módulo de Young:** Parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según la dirección en la que se aplica una fuerza. Este parámetro es propio de cada material. Se denota en nuestro trabajo como E_x .

- (g) Ley de Hooke: Establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada.

Para describir las modelos de vigas, introducimos el sistema de coordenadas (x, y, z) , donde x es la coordenada asociada al largo de la viga, y es al coordenada asociada al ancho y z la coordenada asociada al espesor de la viga. Desde ahora en adelante la tripleta (u, v, w) nos representarán las componentes de desplazamiento sobre las coordenadas (x, y, z) y w_0 corresponderá a la flexión transversal de un punto en el semiplano. Para nuestro estudio, asumiremos que el desplazamiento v es cero.

En lo que sigue, analizaremos los modelos de vigas mencionados anteriormente.

2.1.1. Modelo de Euler-Bernoulli

Es el modelo de viga mas sencillo. En este modelo solo importa el desplazamiento transversal que sufre el eje de la viga. Concretamente, el modelo de Euler-Bernoulli nos dice que las secciones planas inicialmente perpendiculares al eje de la viga, siguen siendo perpendiculares a dicho eje durante la flexión.

Al estudiar la deformación de una viga, usando el modelo de Euler-Bernoulli, ésta tiene una característica muy especial: su longitud L es grande, lo que permite despreciar su espesor (es decir, la viga en cuestión es delgada). Las ecuaciones básicas de la teoría de Euler-Bernoulli son las siguientes:

$$u^E(x, z) = -z \frac{dw_0^E}{dx}, \quad (2.1.1)$$

$$w^E(x, z) = w_0^E(x), \quad (2.1.2)$$

donde el superíndice E denota que las cantidades son referentes a la teoría Euler-Bernoulli.

Para obtener las ecuaciones de movimiento para las vigas Euler-Bernoulli, consideremos primero la energía de deformación virtual δU , la cual está definida por:

$$\delta U = \int_0^L \int_A \zeta_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA dx, \quad (2.1.3)$$

donde δ es el símbolo de variación, A es el área de la sección transversal de la viga (supondremos una viga uniforme), L el largo, ζ_{xx} es el esfuerzo realizado a lo largo del eje x y ε_{xx} la tensión normal, la cual es el esfuerzo interno o resultante de las tensiones

perpendiculares (normales) a la sección transversal de un prisma mecánico. Derivando la ecuación (2.1.1) obtenemos la siguiente relación:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^E}{\partial x} = -z \frac{d^2 w_0^E}{dx^2}. \quad (2.1.4)$$

Definimos el momento flector (o de flexión) σ^E como

$$\sigma^E = \int_A z \zeta_{xx} dA. \quad (2.1.5)$$

Reemplazando el momento flector en la ecuación (2.1.3) tenemos que

$$\delta U = - \int_0^L \sigma^E \frac{d^2 \delta w_0^E}{dx^2} dx. \quad (2.1.6)$$

Escribamos la energía potencial virtual de la viga, considerando una fuerza $q(x)$ que actúa de manera transversal al centroide de la viga como sigue

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0^E dx. \quad (2.1.7)$$

Ahora, usando el principio del desplazamiento virtual, que dice que si un cuerpo está en equilibrio, entonces el trabajo virtual total δW definido por $\delta W = \delta U + \delta V = 0$ tenemos que

$$\delta W = - \int_0^L \sigma^E \frac{d^2 \delta w_0^E}{dx^2} dx - \int_0^L q \delta w_0^E dx = - \int_0^L \left(\sigma^E \frac{d^2 \delta w_0^E}{dx^2} + q \delta w_0^E \right) dx, \quad (2.1.8)$$

integrando por partes dos veces e igualando a cero se obtiene

$$\int_0^L \left(-\frac{d^2 \sigma^E}{dx^2} - q \right) \delta w_0^E dx + \left[\sigma^E \frac{d \delta w_0^E}{dx} - \frac{d \sigma^E}{dx} \delta w_0^E \right]_0^L = 0. \quad (2.1.9)$$

Ahora, como δw_0^E es una cantidad infinitesimal, ésta nunca se anula. Luego, para que haya equilibrio necesariamente

$$-\frac{d^2 \sigma^E}{dx^2} - q = 0. \quad (2.1.10)$$

Luego, la forma que toman las condiciones de contorno en la teoría de Euler-Bernoulli son las siguientes:

- (a) Se puede especificar ya sea el desplazamiento w^E ó la fuerza de corte $\frac{d\sigma^E}{dx}$ en algún punto.
- (b) Se puede especificar, ya sea la derivada del desplazamiento $\frac{dw^E}{dx}$ ó el momento flector σ^E .

Las condiciones w^E y $\frac{dw^E}{dx}$ se conocen como condiciones de contorno esenciales, mientras que $\frac{d\sigma^E}{dx}$ y σ^E se conocen como condiciones naturales.

La forma de relacionar las tensiones y las deformaciones que sufre una viga al aplicar una fuerza, está dada por la ley de Hooke, donde

$$\zeta_{xx} = E_x \varepsilon_{xx} = -E_x z \frac{d^2 w_0^E}{dx^2},$$

donde E_x es el módulo de Young. Este módulo de Young es una constante positiva propia de un objeto elástico que depende del material de la viga.

Así, podemos escribir el momento flector como

$$\sigma^E = \int_A z \zeta_{xx} dA = -D_{xx} \frac{d^2 w^E}{dx^2} \quad (2.1.11)$$

con $D_{xx} = E_x I_{yy}$, donde E_x es el módulo de Young e I_{yy} es el segundo momento de área con respecto al eje y , el cual se define como $I_{yy} = \int_A z^2 dA$.

Finalmente, la ecuación que gobierna el desplazamiento del centroide de una viga, usando la teoría de Euler-Bernoulli, es

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D_{xx} \frac{d^2 w^E}{dx^2} \right) = q, \quad (2.1.12)$$

para $0 < x < L$.

Ahora bien, las condiciones de contorno que le podemos asociar a una viga de Euler-Bernoulli, dependerán del estado en que encontremos la viga, ya sea, con sus extremos empujados, apoyados o libres

Veamos como son las condiciones de contorno de acuerdo a las situaciones anteriores:

- (a) **Viga simplemente apoyada:** En este caso, el desplazamiento transversal w_0^E es conocido y su valor es cero. La fuerza de corte $\gamma^E = \frac{d\sigma^E}{dx}$ es desconocida, pero el momento de flexión σ^E es conocido, aunque la derivada de $\frac{dw_0^E}{dx}$ es desconocida.
- (b) **Viga empotrada:** En este caso, el desplazamiento transversal w^E y la derivada $\frac{dw_0^E}{dx}$ son cero, mientras que la fuerza de corte y el momento flector son desconocidos.

- (c) **Viga libre:** Aquí, el desplazamiento transversal y la derivada $\frac{dw_0^E}{dx}$ son desconocidas. El momento flector y la fuerza de corte se especifican.

2.1.2. Modelo de Timoshenko

El modelo de vigas propuesto por Timoshenko, está mas enriquecido que el de Euler-Bernoulli, ya que en esta teoría se considera el ángulo de rotación de la sección trasnversal. Se considera este ángulo de rotación, o de torsión como aparece también en la literatura, ya que el modelo de Timoshenko se consideran las deformaciones por corte, y por lo tanto se pueden considerar vigas cortas (a diferencia de Euler- Bernoulli). El considerar deformaciones por corte, significa que se está utilizando una teoría de deformaciones de primer orden.

Otro aspecto importante de este modelo, es que considera el espesor de la viga, parámetro que Euler-Bernoulli no incluye en su modelo.

Las ecuaciones básicas de este modelo son las siguientes:

$$u^T(x, z) = z\beta_0^T(x), \quad (2.1.13)$$

$$w^T(x, z) = w_0^T(x), \quad (2.1.14)$$

donde u y w representan las mismas cantidades que en la teoría de Euler-Bernoulli, β corresponde al ángulo de rotación de la sección transversal (ver figura 2.1 b)), el superíndice T indica que las cantidades que se están trabajando corresponden a las de la teoría de Timoshenko.

De las ecuaciones anteriores, podemos desprender mediante derivación, las relaciones de desplazamiento como sigue:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^T}{\partial x} = z \frac{d\beta^T}{dx}, \quad (2.1.15)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial u^T}{\partial z} + \frac{\partial w^T}{\partial x} = \beta^T + \frac{dw^T}{dx}, \quad (2.1.16)$$

donde (2.1.15) se obtiene derivando (2.1.13) y (2.1.16) derivando (2.1.14), donde una vez mas, ε_{xx} es la deformación normal, y τ_{xz} es el esfuerzo axial.

Tal como se hizo en la teoría de vigas anterior, determinaremos la energía de tensión virtual δU como sigue:

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_0^L \int_A (\zeta_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \zeta_{xz} \delta \tau_{xz}) dA dx \\
 &= \int_0^L \int_A \left[\zeta_{xx} z \frac{d\delta \beta^T}{dx} + \zeta_{xz} \left(\delta \beta^T + \frac{d\delta w^T}{dx} \right) \right] dA dx \\
 &= \int_0^L \left[\sigma^T \frac{d\delta \beta^T}{dx} + \gamma^T \left(\delta \beta^T + \frac{d\delta w^T}{dx} \right) \right] dx,
 \end{aligned}$$

donde σ^T es el momento de flexión y γ^T es la fuerza de corte, ζ_{xx} es el esfuerzo normal y ζ_{xz} es el esfuerzo de corte transversal.

Ahora, consideremos una fuerza $q(x)$ que se aplica transversalmente sobre la viga. La energía potencial virtual de ésta la determinamos como:

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w^T dx, \quad (2.1.17)$$

y con esto, podemos una vez más aplicar el principio del trabajo virtual ($\delta W = \delta U + \delta V = 0$) e integrando por partes obteniendo:

$$\int_0^L \left[\left(-\frac{d\sigma^T}{dx} + \gamma^T \right) \delta \beta^T + \left(-\frac{d\gamma^T}{dx} - q \right) \delta w^T \right] dx + [\sigma^T \delta \beta^T + Q_x^T \delta w^T]_0^L = 0. \quad (2.1.18)$$

Por otro lado, como $\delta \beta^T$ y δw^T son cantidades infinitesimales ($0 < x < L$), estas no se anulan, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\sigma^T}{dx} + \gamma^T &= 0, \\
 -\frac{d\gamma^T}{dx} - q &= 0.
 \end{aligned}$$

Ahora, haciendo $\zeta_{xx} = E_x \varepsilon_{xx}$ y $\zeta_{xz} = G_{xz} \tau_{xz}$, el momento flector y la fuerza de corte las podemos reescribir como:

$$\sigma^T = \int_A z \zeta_{xx} dA = D_{xx} \frac{d\beta^T}{dx}, \quad (2.1.19)$$

$$\gamma^T = K_s \int_A \zeta_{xz} dA = K_s A_{xz} \left(\beta^T + \frac{dw^T}{dx} \right), \quad (2.1.20)$$

donde $D_{xx} = E_x I_{yy}$ y $A_{xz} = G_{xz} A$, con G_{xz} el módulo de corte.

Notamos que K_s es una costante llamada *factor de corrección de corte*, la cual se considera para compensar el error que se comete al introducir una distribución de corte constante

a través de la viga. Este factor de corrección no sólo depende de los parámetros geométricos y los asociados al material de la viga, también depende de la carga que se le aplica a la viga y de las condiciones de contorno.

Si sustituímos el momento flector y la fuerza de corte en las ecuaciones (2.1.19) y (2.1.20), las podemos reescribir del siguiente modo:

$$-\frac{d}{dx} \left(D_{xx} \frac{d\beta^T}{dx} \right) + K_s A_{xz} \left(\beta^T + \frac{dw^T}{dx} \right) = 0, \quad (2.1.21)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[K_s A_{xz} \left(\beta^T + \frac{dw^T}{dx} \right) \right] = q, \quad (2.1.22)$$

con $0 < x < L$.

Ahora bien, las condiciones de contorno que le podemos asociar a una viga Timoshenko se basan en las mismas condiciones en que podíamos encontrar las vigas Euler-Bernoulli (con respecto a sus extremos), es decir:

- a) **Simplemente Apoyada:** El desplazamiento w^T es cero y la fuerza de corte es desconocida. Además, el momento flector σ^T es conocido, mientras la rotación β^T es incógnita.
- b) **Empotrada:** El desplazamiento transversal w^T y la rotación β^T son cero, mientras que el momento flector σ^T y la fuerza de corte γ^T son incógnitas.
- c) **Libre:** En este caso, el desplazamiento transversal w^T y la rotación β^T son desconocidas, mientras el momento flector σ^T y la fuerza de corte γ^T se conocen.

2.1.3. Modelo de Reddy-Bickford

El último modelo de viga que estudiaremos es el de Reddy-Bickford. Este modelo es más nuevo que los otros dos, y se deriva de un estudio hecho inicialmente para la teoría de placas.

Las ecuaciones básicas de éste modelo son las siguientes:

$$u^R(x, z) = z\beta^R(x) - \alpha z^3 \left(\beta^R + \frac{dw_0^R}{dx} \right) \quad (2.1.23)$$

$$w^R(x, z) = w_0^R(x) \quad (2.1.24)$$

donde el superíndice R denota que las cantidades involucradas corresponden al modelo de Reddy.

Este modelo considera una variación cuadrática de la deformación de corte transversal, y la desaparición de la deformación transversal en la parte superior e inferior de la viga. Es por esto que el modelo no incluye entre sus parámetros un factor de corrección (caso contrario al modelo de Timoshenko). Las relaciones de desplazamiento de la viga Reddy se obtienen (al igual que en los caso anteriores) derivando las ecuaciones básicas, obteniendo lo siguiente:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^R}{\partial x} = z \frac{d\beta^R}{dx} - \alpha z^3 \left(\frac{d\beta^R}{dx} + \frac{d^2 w^R}{dx^2} \right) \quad (2.1.25)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial u^R}{\partial z} + \frac{\partial w^R}{\partial x} = \beta^R + \frac{dw^R}{dx} - \lambda z^2 \left(\beta^R + \frac{dw^R}{dx} \right) \quad (2.1.26)$$

con $\alpha = \frac{4}{3h^2}$ y $\lambda = 3\alpha = \frac{4}{h^2}$, donde h es el espesor de la viga.

Por lo tanto, la energía de deformación virtual δU la obtenemos como sigue:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A (\zeta_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \zeta_{xz} \delta \tau_{xz}) dA dx \\ &= \int_0^L \int_A \left\{ \sigma_{xx} \left[z \frac{d\delta\beta^R}{dx} - \alpha z^3 \left(\frac{d\delta\beta^R}{dx} + \frac{d^2 \delta w^R}{dx^2} \right) \right] + \sigma_{xz} \left[(1 - \lambda z^2) \left(\delta\beta^R + \frac{d\delta w^R}{dx} \right) \right] \right\} dA dx \\ &= \int_0^L \left[(\sigma^R - \alpha P_{xx}) \frac{d\delta\beta^R}{dx} - \alpha P_{xx} \frac{d^2 \delta w^R}{dx^2} + (\gamma^R - \lambda R_x) \left(\delta\beta^R + \frac{d\delta w^R}{dx} \right) \right] dx \end{aligned}$$

con σ^R y γ^R el momento flector y fuerza de corte respectivamente, las que están determinadas de la misma forma que en el caso anterior ($\sigma^R = \int_A z \zeta_{xx} dA$ y $\gamma^R = \int_A \zeta_{xz} dA$) y $P_{xx} = \int_A z^3 \zeta_{xx} dA$ y $R_x = \int_A z^2 \zeta_{xz} dA$ son las tensiones resultantes de alto orden.

Como en esta teoría se considera un desplazamiento cuadrático de las fibras de la viga, no es necesario considerar un factor de corrección, hecho contrario al que ocurre en el modelo de Timoshenko.

La energía potencial virtual de la carga q está definida como

$$\delta V = - \int_0^L q(x) \delta w^R dx.$$

Así, usamos el principio de desplazamiento virtual para obtener

$$\int_0^L \left[(\sigma^R - \alpha P_{xx}) \frac{d\delta\beta^R}{dx} - \alpha P_{xx} \frac{d^2\delta w^R}{dx^2} + (\gamma^R - \lambda R_x) \left(\delta\beta^R - \frac{d\delta w^R}{dx} \right) \right] dx - \int_0^L q \delta w^R dx = 0 \quad (2.1.27)$$

$$= \int_0^L \left[(\sigma^R - \alpha P_{xx}) \frac{d\delta\beta^R}{dx} - \alpha P_{xx} \frac{d^2\delta w^R}{dx^2} + (\gamma^R - \lambda R_x) \left(\delta\beta^R - \frac{d\delta w^R}{dx} \right) - q \delta w^R \right] dx \quad (2.1.28)$$

definimos las siguientes variables auxiliares:

$$\hat{\sigma}^R = \sigma^R - \alpha P_{xx} \quad (2.1.29)$$

$$\hat{\gamma}_x^R = \gamma^R - \lambda R_x \quad (2.1.30)$$

y reescribimos (2.1.28) de la siguiente manera

$$0 = \int_0^L \left[\hat{\sigma}^R \frac{d\delta\beta^R}{dx} - \alpha P_{xx} \frac{d^2\delta w^R}{dx^2} + \hat{\gamma}^R \left(\delta\beta^R + \frac{d\delta w^R}{dx} \right) - q \delta w^R \right] dx$$

Asociamos e integramos por partes las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\hat{\sigma}^R \frac{d\delta\beta^R}{dx} + \hat{\gamma}^R \delta\beta^R \right] dx &= \hat{\sigma}^R \delta\beta^R \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\hat{\sigma}^R}{dx} \delta\beta^R \\ \int_0^L -\alpha P_{xx} \frac{d^2\delta w^R}{dx^2} dx &= -\alpha P_{xx} \frac{d\delta w^R}{dx} \Big|_0^L + \alpha \frac{dP_{xx}}{dx} \delta w^R \Big|_0^L - \int_0^L \alpha \frac{d^2P_{xx}}{dx^2} \delta w^R dx \\ \int_0^L \hat{\gamma}^R \frac{d\delta w^R}{dx} dx &= \hat{\gamma}^R \delta w^R \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\hat{\gamma}^R}{dx} \delta w^R dx \end{aligned}$$

luego, reemplazamos en (2.1.28) estos resultados y factorizando se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \left[\left(-\frac{d\hat{\sigma}^R}{dx} + \hat{\gamma}^R \right) \delta\beta^R + \left(-\alpha \frac{d^2P_{xx}}{dx^2} - \frac{d\hat{\gamma}^R}{dx} \right) \delta w^R \right] dx \\ &+ \left[\hat{\sigma}^R \delta\beta^R + \left(\alpha \frac{dP_{xx}}{dx} + \hat{\gamma}^R \right) \delta w^R - \alpha P_{xx} \frac{d\delta w^R}{dx} \right]_0^L \end{aligned}$$

y como δw^R y $\delta\beta^R$ son cantidades infinitesimales en $0 < x < L$, para que exista la igualdad anterior, necesariamente ocurre que

$$-\frac{d\hat{\sigma}^R}{dx} + \hat{\gamma}^R = 0 \quad (2.1.31)$$

$$-\alpha \frac{d^2P_{xx}}{dx^2} - \frac{d\hat{\gamma}^R}{dx} = q \quad (2.1.32)$$

las que corresponden a las ecuaciones de equilibrio en el modelo de Reddy-Bickford.

Como éste modelo involucra más variables y un desplazamiento de fibras cuadrático, y no lineal como en los otros modelos, las condiciones de contorno aumentan en comparación a Timoshenko y Euler-Bernoulli.

Tenemos que las relaciones de desplazamientos provocados por los esfuerzos están dados por

$$\begin{aligned}\sigma^R &= \int_A z \zeta_{xx} dA = \hat{D}_{xx} \frac{d\beta^R}{dx} - \alpha F_{xx} \frac{d^2 w^R}{dx^2}, \\ P_{xx} &= \int_A z^3 \zeta_{xx} dA = \hat{F}_{xx} \frac{d\beta^R}{dx} - \alpha H_{xx} \frac{d^2 w^R}{dx^2}, \\ \gamma^R &= \int_A \zeta_{xz} dx = \hat{A}_{xz} \left(\beta^R + \frac{dw^R}{dx} \right), \\ R_x &= \int_A z^2 \zeta_{xz} dz = \hat{D}_{xz} \left(\beta^R + \frac{dw^R}{dx} \right),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{D}_{xx} &= D_{xx} - \alpha F_{xx}, & \hat{F}_{xx} &= F_{xx} - \alpha H_{xx}, \\ \hat{A}_{xz} &= A_{xz} - \lambda D_{xz}, & \hat{D}_{xz} &= D_{xz} - \lambda F_{xz}.\end{aligned}$$

Luego, expresando las ecuaciones de equilibrio en términos del desplazamiento transversal w_0 y de la rotación de las fibras ϕ tenemos

$$-\frac{d}{dx} \left(\bar{D}_{xx} \frac{d\beta^R}{dx} - \alpha \hat{F}_{xx} \frac{d^2 w^R}{dx^2} \right) + \bar{A}_{xz} \left(\beta^R + \frac{dw^R}{dx} \right) = 0, \quad (2.1.33)$$

$$-\alpha \frac{d^2}{dx^2} \left(\hat{F}_{xx} \frac{d\beta^R}{dx} - \alpha H_{xx} \frac{d^2 w^R}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left[\bar{A}_{xz} \left(\beta^R + \frac{dw^R}{dx} \right) \right] = q. \quad (2.1.34)$$

$$(2.1.35)$$

Son finalmente éstas las ecuaciones que gobiernan el modelo de Reddy-Bickford, donde

$$\bar{A}_{xz} = \hat{A}_{xz} - \beta \hat{D}_{xz}, \quad \bar{D}_{xx} = \hat{D}_{xx} - \alpha \hat{F}_{xx}, \quad \bar{F}_{xx} = \hat{F}_{xx} - \alpha \hat{H}_{xx}$$

Finalmente mostramos cómo pueden ser las distintas condiciones de contorno para esta viga:

- (a) **Simplemente Apoyada:** El desplazamiento transversal w^R es cero y el esfuerzo de corte $\hat{\gamma}^R$ es desconocido. Además, el momento flector $\hat{\sigma}^R$ y el esfuerzo de alto orden αP_{xx} se deben especificar, mientras que la rotación de las fibras β^R y la derivada dw^R/dx no se especifican.

- (b) **Empotrada:** El desplazamiento transversal, la rotación de las fibras y la derivada dw^R/dx son cero. El esfuerzo de corte, el momento flector y el esfuerzo de alto orden no se especifican.
- (c) **Libre:** El desplazamiento transversal, la rotación de las fibras y la derivada dw^R/dx no se especifican, mientras que el esfuerzo de corte, el momento flector y el esfuerzo de alto orden si se deben especificar.
- (d) **Elásticamente Apoyada:** El esfuerzo de corte está dado por $\hat{\gamma}^R = -k_1 w^R$ en la parte apoyada, donde k_1 es la constante de elasticidad de la parte apoyada. Si también existiese una rotación elástica, el momento flector estaría dado por $\hat{\sigma}^R = k_2 \beta^R$, donde k_2 es la constante de torsión elástica. Además, el esfuerzo de alto orden es cero.

Capítulo 3

Método de elementos finitos libre de bloqueo para una formulación de momento de flexión de vigas Timoshenko.

3.1. Modelo de la Viga de Timoshenko

Consideremos una viga elástica, la cual satisface las hipótesis de Timoshenko para los desplazamientos admisibles. Asumamos que la geometría y los parámetros físicos pueden ser variables a lo largo de la dirección axial. La deformación de la viga se describe en términos del desplazamiento transversal w y la rotación de la sección transversal β . Sea x la coordenada en la dirección del eje X .

La ecuación para el desplazamiento de una viga Timoshenko empotrada, sujeta a una carga transversal $p(x)$ es: *Hallar $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ tal que*

$$\int_I (E(x)\mathbb{I}(x)\beta'(x))\eta'(x)dx + \int_I \kappa_c(x)G(x)A(x)(\beta(x) - w'(x))(\eta(x) - v'(x))dx = \int_I p(x)v(x)dx \quad (3.1.1)$$

para todo $(\eta, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$, donde $I := (0, L)$, L es el largo de la viga, $E(x)$ es el módulo de Young, $\mathbb{I}(x)$ el momento de inercia de la sección transversal, $A(x)$ el área de la sección

transversal, $G(x) := E(x)/(2(1 + \nu(x)))$ el módulo de corte, con $\nu(x)$ el radio de Poisson, y $k_c(x)$ el factor de corrección. Consideramos que $E(x)$, $\mathbb{I}(x)$, $A(x)$ y $\nu(x)$ son suaves a trozos en I , el caso más común es cuando todos estos coeficientes son constantes a trozos. Por otro lado, las primas denotan las derivadas con respecto a la variable x .

Es bien conocido que en los elementos finitos estándar, las formulaciones como (3.1.1) para estructuras delgadas, llevan a un bloqueo numérico, un fenómeno inducido por la diferencia entre la magnitud de los coeficientes de los diferentes términos (ver [1]). El trabajo adecuado para analizar este problema, es reescalar la formulación (3.1.1) para así identificar una familia de problemas con un límite bien puesto a medida que el espesor tiende a cero. Con este objetivo, introducimos el siguiente parámetro adimensional, asociado al grosor de la viga,

$$t^2 := \frac{1}{L} \int_I \frac{\mathbb{I}(x)}{A(x)L^2} dx, \quad (3.1.2)$$

el cual asumimos puede tomar valores en el intervalo $(0, 1]$.

Definimos

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{p(x)}{t^3}, \quad \hat{\mathbb{I}}(x) := \frac{\mathbb{I}(x)}{t^3}, \quad \hat{A}(x) := \frac{A(x)}{t}, \\ \mathbb{E}(x) &:= E(x)\hat{\mathbb{I}}(x) \quad y \quad \kappa(x) := G(x)\hat{A}(x)k_c(x). \end{aligned}$$

Así, el problema (3.1.1) es equivalente con el siguiente:

Hallar $(\beta, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ tal que

$$\int_I \mathbb{E}(x)\beta'(x)\eta'(x) dx + \frac{1}{t^2} \int_I \kappa(x)(\beta(x) - w'(x))(\eta(x) - v'(x)) dx = \int_I f(x)v(x) dx \quad (3.1.3)$$

para todo $(\eta(x), v(x)) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$.

Ahora, asumimos que existen constantes $\underline{\mathbb{E}}, \bar{\mathbb{E}}, \underline{\kappa}, \bar{\kappa} \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}} &\geq \mathbb{E}(x) \geq \underline{\mathbb{E}} \quad \forall x \in I, \\ \bar{\kappa} &\geq \kappa(x) \geq \underline{\kappa} \quad \forall x \in I, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

en tal caso, para cada $t > 0$, la forma bilinear del lado izquierdo en (3.1.3) es elíptica y por lo tanto este problema tiene única solución.

El objetivo de este trabajo es estudiar una formulación alternativa a las que clásicamente son estudiadas. Con este fin, e introduciendo el momento flector $\sigma(x) := \mathbb{E}(x)\beta'(x)$ y el esfuerzo de corte escalado $\gamma(x) := t^{-2}\kappa(x)(\beta(x) - w'(x))$ como nuevas incógnitas en el modelo, el

problema (3.1.3) se reescribe como sigue (ver [5]):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(x) = \mathbb{E}(x)\beta'(x) & \text{en } I, \\ -\sigma'(x) + \gamma(x) = 0 & \text{en } I, \\ \gamma'(x) = f(x) & \text{en } I, \\ \gamma(x) = t^{-2}\kappa(x)(\beta(x) - w'(x)) & \text{en } I, \\ w(0) = \beta(0) = w(L) = \beta(L) = 0. \end{array} \right. \quad (3.1.5)$$

Finalmente, testeando las ecuaciones de (3.1.5) con funciones test adecuadas e integrando por partes, obtenemos la siguiente formulaci3n variacional, donde ahora omitiremos la dependencia de la variable x :

Hallar $((\sigma, \gamma), (\beta, w)) \in V \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \int_I \frac{\sigma\tau}{\mathbb{E}} + t^2 \int_I \frac{\gamma\xi}{\kappa} + \int_I \beta(\tau' - \xi) - \int_I w\xi' &= 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in V, \\ \int_I \eta(\sigma' - \gamma) - \int_I v\gamma' &= - \int_I fv \quad \forall (\eta, v) \in Q, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

donde

$$V := H^1(I) \times H^1(I),$$

y

$$Q := L^2(I) \times L^2(I),$$

cada uno dotado con su correspondiente norma.

Finalmente, dotamos a $V \times Q$ con la correspondiente norma del espacio producto. Reescribimos el problema variacional (3.1.6) como sigue:

Hallar $((\sigma, \gamma), (\beta, w)) \in V \times Q$ tal que

$$a((\sigma, \gamma), (\tau, \xi)) + b((\tau, \xi), (\beta, w)) = 0 \quad \forall (\tau, \xi) \in V, \quad (3.1.7)$$

$$b((\sigma, \gamma), (\eta, v)) = F(\eta, v) \quad \forall (\eta, v) \in Q, \quad (3.1.8)$$

donde las formas bilineales $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ y el funcional lineal $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$ est1n definidos por

$$a((\sigma, \gamma), (\tau, \xi)) := \int_I \frac{\sigma\tau}{\mathbb{E}} + t^2 \int_I \frac{\gamma\xi}{\kappa}, \quad (3.1.9)$$

$$b((\tau, \xi), (\beta, w)) := \int_I \beta(\tau' - \xi) - \int_I w\xi', \quad (3.1.10)$$

y

$$F(\eta, v) := - \int_I f v,$$

para todo $(\sigma, \gamma), (\tau, \xi) \in V$ y $(\eta, v) \in Q$.

A continuación mostraremos que el problema (3.1.7)-(3.1.8) satisface las hipótesis de la teoría de Babuška-Brezzi, y por lo tanto tiene una única solución, además de depender continuamente de los datos de esta formulación variacional.

Observamos primero que las formas bilineales a y b y el funcional lineal F están acotados con constantes independientes del espesor t de la viga. En efecto:

$$\begin{aligned} |a((\sigma, \gamma), (\tau, \xi))| &= \left| \int_I \frac{\sigma \tau}{\mathbb{E}} + t^2 \int_I \frac{\gamma \xi}{\kappa} \right| \\ &\leq \left| \int_I \frac{\sigma \tau}{\mathbb{E}} \right| + \left| t^2 \int_I \frac{\gamma \xi}{\kappa} \right| \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{E}} \|\sigma\|_{0,I} \|\tau\|_{0,I} + \frac{t^2}{\kappa} \|\gamma\|_{0,I} \|\xi\|_{0,I} \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{E}} \|\sigma\|_{0,I} \|\tau\|_{0,I} + \frac{1}{\kappa} \|\gamma\|_{0,I} \|\xi\|_{0,I} \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{\mathbb{E}}, \frac{1}{\kappa} \right\} (\|\sigma\|_{0,I} \|\tau\|_{0,I} + \|\gamma\|_{0,I} \|\xi\|_{0,I}) \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{\mathbb{E}}, \frac{1}{\kappa} \right\} (\|\sigma\|_{0,I}^2 + \|\gamma\|_{0,I}^2)^{1/2} (\|\tau\|_{0,I}^2 + \|\xi\|_{0,I}^2)^{1/2} \\ &\leq C_1 \|(\sigma, \gamma)\|_V \|(\tau, \xi)\|_V \end{aligned}$$

donde la constante $C_1 = \max \left\{ \frac{1}{\mathbb{E}}, \frac{1}{\kappa} \right\}$ es independiente de t .

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 |b((\tau, \xi), (\beta, w))| &= \left| \int_I \beta(\tau' - \xi) dx - \int_I w \xi' dx \right| \\
 &\leq \left| \int_I \beta(\tau' - \xi) dx \right| + \left| \int_I w \xi' dx \right| \\
 &\leq \|\beta\|_{0,I} \|\tau' - \xi\|_{0,I} + \|w\|_{0,I} \|\xi'\|_{0,I} \\
 &\leq \|\beta\|_{0,I} (\|\tau'\|_{0,I} + \|\xi\|_{0,I}) + \|w\|_{0,I} \|\xi'\|_{0,I} \\
 &\leq \|\beta\|_{0,I} \|\tau'\|_{0,I} + \|\beta\|_{0,I} \|\xi\|_{0,I} + \|w\|_{0,I} \|\xi'\|_{0,I} \\
 &\leq (2\|\beta\|_{0,I}^2 + \|w\|_{0,I}^2)^{1/2} (\|\tau'\|_{0,I}^2 + \|\xi\|_{0,I}^2 + \|\xi'\|_{0,I}^2)^{1/2} \\
 &\leq \sqrt{2} (\|\beta\|_{0,I}^2 + \|w\|_{0,I}^2)^{1/2} (\|\tau\|_{1,I}^2 + \|\xi\|_{1,I}^2)^{1/2} \\
 &= C_2 \|(\tau, \xi)\|_V \|(\beta, w)\|_Q,
 \end{aligned}$$

donde $C_2 = \sqrt{2}$.

Finalmente

$$|F(\eta, v)| = \left| - \int_I f v \right| \leq \|f\|_{0,I} \|v\|_{0,I} = C_3 \|v\|_{0,I} \leq C_3 \|(\eta, v)\|_Q,$$

donde $C_3 = \|f\|_{0,I}$.

De este modo hemos visto que las formas bilineales y el funcional están acotados con constantes independientes del espesor t .

Sea

$$K := \{(\tau, \xi) \in V : b((\tau, \xi), (\eta, v)) = 0, \quad \forall (\eta, v) \in Q\}$$

el núcleo continuo de la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$, se tiene

$$K = \{(\tau, \xi) \in V : \tau' - \xi = 0 \text{ y } \xi' = 0 \text{ en } I\} = \{(\tau, \tau') : \tau \in \mathbb{P}_1(I)\}.$$

El siguiente lema muestra que la forma bilineal a es V -elíptica en K con una constante independiente de t

Lema 3.1.1. *Existe una constante $\alpha > 0$, independiente de t tal que*

$$a((\tau, \xi), (\tau, \xi)) \geq \alpha \|(\tau, \xi)\|_V^2 \quad \forall (\tau, \xi) \in K$$

Demostración. Dado $(\tau, \xi) \in K$, de (3.1.9) y (3.1.4) obtenemos

$$a((\tau, \xi), (\tau, \xi)) = \int_I \frac{\tau^2}{\mathbb{E}} + t^2 \int_I \frac{\xi^2}{\kappa} \geq \frac{1}{\mathbb{E}} \|\tau\|_{0,I}^2 + \frac{t^2}{\kappa} \|\xi\|_{0,I}^2 \geq \frac{1}{\mathbb{E}} \|\tau\|_{0,I}^2 \geq C \|\tau\|_{1,I}^2$$

donde la última desigualdad se obtiene debido a la equivalencia entre $\|\cdot\|_{0,I}$ y $\|\cdot\|_{1,I}$, con una constante independiente de t en $K \cong \mathbb{P}_1(I)$. Además, usando la definición de K , y del hecho que

$$\|(\tau, \xi)\|_V^2 = \|\tau\|_{1,I}^2 + \|\tau'\|_{0,I}^2 \quad \forall (\tau, \xi) \in K$$

tenemos

$$a((\tau, \xi), (\tau, \xi)) \geq C\|\tau\|_{1,I}^2 = C \left(\|\tau\|_{0,I}^2 + \frac{1}{2}\|\tau'\|_{0,I}^2 + \frac{1}{2}\|\xi\|_{0,I}^2 + \|\xi'\|_{0,I}^2 \right) \geq \alpha\|(\tau, \xi)\|_V^2$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Ahora, estamos en condiciones de mostrar una condición inf-sup para la forma bilineal b , que no dependa de t .

Lema 3.1.2. *Existe una constante $C > 0$ independiente de t tal que*

$$\sup_{\substack{(\tau, \xi) \in V \\ (\tau, \xi) \neq 0}} \frac{b((\tau, \xi), (\eta, v))}{\|(\tau, \xi)\|_V} \geq C\|(\eta, v)\|_Q \quad \forall (\eta, v) \in Q. \quad (3.1.11)$$

Demostración. Sea $(\eta, v) \in Q$. Sea $\tilde{\tau}(r) := \int_0^r \eta(s) ds$, $0 \leq r \leq L$. Tenemos que $\tilde{\tau}' = \eta \in L^2(I)$. Por lo tanto $\tilde{\tau} \in H^1(I)$, y además

$$|\tilde{\tau}(r)| = \left| \int_0^r \eta(s) ds \right| \leq \left(\int_0^r 1 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^r \eta(s)^2 ds \right)^{1/2} \leq r^{1/2} \|\eta\|_{0,I},$$

luego

$$\|\tilde{\tau}\|_{0,I}^2 = \int_0^L |\tilde{\tau}(r)|^2 dr \leq \|\eta\|_{0,I}^2 \int_0^L r dr = \frac{L^2}{2} \|\eta\|_{0,I}^2,$$

y como $\|\tilde{\tau}'\|_{0,I} = \|\eta\|_{0,I}$ tenemos que

$$\|\tilde{\tau}\|_{0,I}^2 + \|\tilde{\tau}'\|_{0,I}^2 \leq \frac{L^2}{2} \|\eta\|_{0,I}^2 + \|\eta\|_{0,I}^2,$$

finalmente

$$\|\tilde{\tau}\|_{1,I} \leq \left(\frac{L^2 + 2}{2} \right)^{1/2} \|\eta\|_{0,I}.$$

de este modo

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(\tau, \xi) \in V \\ (\tau, \xi) \neq 0}} \frac{b((\tau, \xi), (\eta, v))}{\|(\tau, \xi)\|_V} &\geq \frac{b((\tilde{\tau}, 0), (\eta, v))}{\|\tilde{\tau}\|_{1,I}} \\ &= \frac{\|\eta\|_{0,I}^2}{\|\tilde{\tau}\|_{1,I}} \geq \left(\frac{2}{L^2 + 2} \right)^{1/2} \|\eta\|_{0,I}. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Finalmente, sea $\tilde{\xi}(r) := -\int_0^r v(s)ds$, $0 \leq r \leq L$. Usamos los mismos argumentos anteriores para mostrar que

$$\|\tilde{\xi}\|_{1,I} \leq \left(\frac{L^2 + 2}{2}\right)^{1/2} \|v\|_{0,I}.$$

Así, se sigue que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(\tau, \xi) \in V \\ (\tau, \xi) \neq 0}} \frac{b((\tau, \xi), (\eta, v))}{\|(\tau, \xi)\|_V} &\geq \frac{b((0, \tilde{\xi}), (\eta, v))}{\|\tilde{\xi}\|_{1,I}} \\ &= \frac{\|v\|_{0,I}^2 - \int_I \eta \tilde{\xi}}{\|\tilde{\xi}\|_{1,I}} \geq \left(\frac{2}{L^2 + 2}\right)^{1/2} \|v\|_{0,I} - \|\eta\|_{0,I}. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

De ésta desigualdad y (3.1.13), es inmediato que

$$\sup_{\substack{(\tau, \xi) \in V \\ (\tau, \xi) \neq 0}} \frac{b((\tau, \xi), (\eta, v))}{\|(\tau, \xi)\|_V} \geq \frac{2}{\sqrt{L^2 + 2}(\sqrt{L^2 + 2} + \sqrt{2})} \|v\|_{0,I}.$$

Así, la demostración se sigue de esta estimación, y (3.1.12). $\square$

Ahora estamos en condiciones de establecer el resultado principal de ésta sección, el cual proporciona la existencia y unicidad de solución del problema continuo (3.1.7)-(3.1.8).

Teorema 3.1.1. *Existe una única solución $((\sigma, \gamma), (\beta, w)) \in V \times Q$ del problema (3.1.7)-(3.1.8) que satisface la siguiente dependencia continua de los datos:*

$$\|((\sigma, \gamma), (\beta, w))\|_{V \times Q} \leq C \|f\|_{0,I},$$

donde C es independiente de t .

Demostración. En virtud de los Lemas (3.1.1) y (3.1.11), la demostración se obtiene de la aplicación directa de [4, Teorema II.1.1]. $\square$

La siguiente proposición establece un resultado de regularidad adicional para la solución del problema (3.1.7)-(3.1.8). Este resultado será el punto clave para probar las estimaciones del error del método propuesto.

Proposición 3.1.1. *Suponga que $f \in H^\ell(I)$, $\ell = 0, 1$. Sea $((\sigma, \gamma), (\beta, w)) \in V \times Q$ la solución del problema (3.1.7)-(3.1.8). Entonces, existe una constante C , independiente de t y f , tal que*

$$\|w\|_{1,I} + \|\beta\|_{1,I} + \|\gamma\|_{\ell+1,I} + \|\sigma\|_{\ell+2,I} \leq C \|f\|_{\ell,I}.$$

Demostración. En virtud de la equivalencia entre los problemas (3.1.6) y (3.1.3), vamos a considerar este último para demostrar el resultado.

Consideremos la siguiente descomposición del esfuerzo de corte:

$$\gamma = \psi' + k, \quad (3.1.14)$$

con $\psi \in H_0^1(I)$ y $k := (\frac{1}{L} \int_I \gamma) \in \mathbb{R}$. Tenemos que el problema (3.1.3) y el siguiente son equivalentes:

Dado $f \in H^\ell(I)$, $\ell = 0, 1$, hallar $(\psi, \beta, k, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) \times \mathbb{R} \times H_0^1(I)$ tal que

$$\begin{cases} \int_I \psi' v' = - \int_I f v & \forall v \in H_0^1(I), \\ \int_I \mathbb{E} \beta' \eta' + \int_I k \eta = - \int_I \psi' \eta & \forall \eta \in H_0^1(I), \\ \int_I \beta q - t^2 \int_I \frac{k q}{\kappa} = -t^2 \int_I \frac{\psi' q}{\kappa} & \forall q \in \mathbb{R}, \\ \int_I w' \delta' = \int_I \beta \delta' + t^2 \int_I \frac{\psi' \delta'}{\kappa} & \forall \delta \in H_0^1(I). \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Para este problema, tenemos que para cualquier $t \in (0, 1]$ y $f \in H^\ell(I)$, $\ell = 0, 1$, existe una única solución $(\psi, \beta, k, w) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) \times \mathbb{R} \times H_0^1(I)$. Por otro lado, existe una constante C independiente t y f , tal que

$$\|\psi\|_{\ell+2, I} + \|\beta\|_{1, I} + |k| + \|w\|_{1, I} \leq C \|f\|_{\ell, I}.$$

En efecto, dado $f \in H^\ell(I)$, $\ell = 0, 1$, del problema (3.1.15)₁ y el Teorema de Lax-Milgram, tenemos que existe una única $\psi \in H_0^1(I) \cap H^{\ell+2}(I)$, solución y $\|\psi\|_{\ell+2, I} \leq C \|f\|_{\ell, I}$, $\ell = 0, 1$. Ahora, para todo $t \in (0, 1]$ podemos aplicar el Teorema 5.1 de [1] para mostrar que existe una única solución $(\beta, k) \in H_0^1(I) \times \mathbb{R}$ del problema (3.1.15)₂₋₃, además,

$$\|\beta\|_{1, I} + |k| \leq C \|\psi\|_{1, I} \leq C \|f\|_{0, I},$$

donde la constante C es independiente de t .

Finalmente, obtenemos por el Teorema de Lax-Milgram, que existe una única solución $w \in H_0^1(I)$ del problema (3.1.15)₄, y eligiendo $\delta = w$, obtenemos

$$\|w\|_{1, I} \leq C (\|\beta\|_{0, I} + \|\psi'\|_{0, I}) \leq C \|f\|_{0, I}.$$

En consecuencia, y en virtud de (3.1.14), (3.1.4), la primera y segunda ecuación de (3.1.5) y la equivalencia entre los problemas (3.1.3) y (3.1.15), tenemos que existe C independiente de t y f tal que para $\ell = 0, 1$

$$\|\beta\|_{1, I} + \|w\|_{1, I} + \|\gamma\|_{\ell+1, I} + \|\sigma\|_{\ell+2, I} \leq C \|f\|_{\ell, I}.$$

Así terminamos la demostración. □

Observación 3.1.1. *Es posible refinar la proposición anterior considerando cargas que sean suaves a trozos. Suponga que existe una partición $0 = s_0 < \dots < s_n = L$, del intervalo I . Si denotamos $S_i := (s_{i-1}, s_i)$, $i = 1, \dots, n$, entonces, asumimos $f \in H^1(S_i)$. Luego, repitiendo los mismos argumentos de la demostración, obtenemos el siguiente resultado para la solución del problema (3.1.7)–(3.1.8): Existe una constante C , independiente de t y f , tal que*

$$\begin{aligned} \|w\|_{1,I} + \|\beta\|_{1,I} + \|\gamma\|_{1,I} + \left(\sum_{i=1}^n \|\gamma''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} + \|\sigma\|_{2,I} + \left(\sum_{i=1}^n \|\sigma'''\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2} \\ \leq C \left(\|f\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

3.2. Esquema Mixto Discreto

En esta sección, presentamos nuestro método de elementos finitos para el problema de la viga de Timoshenko. Con este objetivo, primero consideramos una familia de particiones de I

$$\mathcal{T}_h := 0 = x_0 < \dots < x_N = L.$$

Denotamos $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, de longitud $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, N$, y la longitud del intervalo mayor la denotamos por $h := \max_{1 \leq j \leq N} h_j$.

Para aproximar el esfuerzo de corte y el momento flector, consideramos el espacio de las funciones lineales a trozos y continuas:

$$W_h := \{\xi_h \in H^1(I) : \xi_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1(I_j), j = 1, \dots, N\}.$$

Sea $\mathcal{L}(\xi) \in W_h$ el interpolante de Lagrange de $\xi \in H^1(I)$, y recordamos que

$$\|\xi - \mathcal{L}(\xi)\|_{1,I} \leq Ch|\xi|_{2,I} \quad \forall \xi \in H^2(I), \quad (3.2.16)$$

$$\|\xi - \mathcal{L}(\xi)\|_{0,I} \leq Ch^2|\xi|_{2,I} \quad \forall \xi \in H^2(I). \quad (3.2.17)$$

Para aproximar el desplazamiento transversal y la rotación, usaremos el espacio de las funciones constantes a trozos:

$$Z_h := \{v_h \in L^2(I) : v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_0(I_j), j = 1, \dots, N\}.$$

También consideramos la proyección de L^2 sobre Z_h :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : L^2(I) &\rightarrow Z_h, \\ v &\mapsto \mathcal{P}(v) := \bar{v} \in Z_h : \int_I (v - \bar{v}) q_h = 0 \quad \forall q_h \in Z_h. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\|v - \mathcal{P}(v)\|_{0,I} \leq Ch|v|_{1,I} \quad \forall v \in H^1(I). \quad (3.2.18)$$

Definiendo $V_h := W_h \times W_h$ and $Q_h := Z_h \times Z_h$, la discretización del problema (3.1.7)-(3.1.8) es:

Hallar $((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h)) \in V_h \times Q_h$ tal que

$$a((\sigma_h, \gamma_h), (\tau_h, \xi_h)) + b((\tau_h, \xi_h), (\beta_h, w_h)) = 0 \quad \forall (\tau_h, \xi_h) \in V_h, \quad (3.2.19)$$

$$b((\sigma_h, \gamma_h), (\eta_h, v_h)) = F(\eta_h, v_h) \quad \forall (\eta_h, v_h) \in Q_h. \quad (3.2.20)$$

Nuestro siguiente objetivo, es establecer las versiones discretas de los Lemas 3.1.1 y 3.1.2 para así concluir la existencia y unicidad de solución, y estabilidad del problema (3.2.19)-(3.2.20). Con esta meta, notamos que el núcleo discreto de la forma bilineal b es:

$$K_h := \{(\tau_h, \xi_h) \in V_h : b((\tau_h, \xi_h), (\eta_h, v_h)) = 0 \quad \forall (\eta_h, v_h) \in Q_h\}.$$

Sea $(\tau_h, \xi_h) \in K_h$, tomando $(0, v_h) \in Q_h$ y usando el hecho que $\xi'_h|_{I_j}$ es una constante, y además que $v_h|_{I_j}$ es también una constante, concluimos que $\xi'_h = 0$ in I .

Ahora, eligiendo $(\eta_h, 0) \in Q_h$, como $\tau'_h|_{I_j}$ es constante y $\xi_h|_{I_j}$ es también constante, concluimos que $(\tau'_h - \xi_h) = 0$ en I_j y por lo tanto $\tau'_h = \xi_h$ en I . Así, obtenemos

$$K_h = \{(\tau_h, \xi_h) \in V_h : (\tau'_h - \xi_h) = 0 \text{ y } \xi'_h = 0 \text{ en } I\} = \{(\tau_h, \tau'_h) : \tau_h \in \mathbb{P}_1(I)\}.$$

De este modo, tenemos que K_h coincide con K , y se tiene

Lema 3.2.1. *Existe $\alpha > 0$ independiente de h y t tal que*

$$a((\tau_h, \xi_h), (\tau_h, \xi_h)) \geq \alpha \|(\tau_h, \xi_h)\|_V^2 \quad \forall (\tau_h, \xi_h) \in K_h.$$

Continuamos con el siguiente lema que establece el análogo discreto para el Lema 3.1.2.

Lema 3.2.2. *Existe $C > 0$, independendiente de h y t , tal que*

$$\sup_{\substack{(\tau_h, \xi_h) \in V_h \\ (\tau_h, \xi_h) \neq 0}} \frac{b((\tau_h, \xi_h), (\eta_h, v_h))}{\|(\tau_h, \xi_h)\|_V} \geq C \|(\eta_h, v_h)\|_Q \quad \forall (\eta_h, v_h) \in Q_h.$$

Demostración. Sea $(\eta_h, v_h) \in Q_h$. Podemos usar los mismos argumentos usados para la demostración del Lema 3.1.2. En efecto, $\tilde{\tau}_h(r) := \int_0^r \eta_h(s)ds$ pertenece a W_h , y lo mismo ocurre con $\tilde{\xi}_h(r) := \int_0^r v_h(s)ds$. $\square$

Ahora podemos establecer la existencia, unicidad y estabilidad de la solución del problema (3.2.19)-(3.2.20).

Teorema 3.2.1. *Existe una única $((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h)) \in V_h \times Q_h$ solución del problema discreto (3.2.19)-(3.2.20). Por otro lado, existen $\tilde{C}, C > 0$, independientes de h y t , tales que*

$$\|((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h))\|_{V \times Q} \leq \tilde{C} \|f\|_{0, I},$$

y

$$\begin{aligned} & \|((\sigma, \gamma), (\beta, w)) - ((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h))\|_{V \times Q} \\ & \leq C \inf_{((\tau_h, \xi_h), (\eta_h, v_h)) \in V_h \times Q_h} \|((\sigma, \gamma), (\beta, w)) - ((\tau_h, \xi_h), (\eta_h, v_h))\|_{V \times Q}, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

donde $((\sigma, \gamma), (\beta, w)) \in V \times Q$ es la solución del problema variacional mixto (3.1.7)-(3.1.8).

Demostración. La existencia y unicidad del problema (3.2.19)-(3.2.20) y la cota de error (3.2.21) se obtienen de la teoría abstracta de los problemas punto silla [4, Teorema II.2.1] y los Lemas 3.2.1 and 3.2.2. $\square$

El siguiente teorema nos proporciona una tasa de convergencia de nuestro esquema mixto de elementos finitos (3.2.19)-(3.2.20).

Teorema 3.2.2. *Sean $((\sigma, \gamma), (\beta, w)) \in V \times Q$ y $((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h)) \in V_h \times Q_h$ las soluciones de los problemas continuo y discreto (3.1.7)-(3.1.8) y (3.2.19)-(3.2.20), respectivamente. Si $f \in H^1(I)$, entonces,*

$$\|((\sigma, \gamma), (\beta, w)) - ((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h))\|_{V \times Q} \leq Ch \|f\|_{1, I},$$

donde la constante $C > 0$ es independiente de h y t .

Demostración. Por el Teorema 3.2.1 tenemos

$$\begin{aligned} & \|((\sigma, \gamma), (\beta, w)) - ((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h))\|_{V \times Q} \\ & \leq C \|((\sigma, \gamma), (\beta, w)) - ((\mathcal{L}(\sigma), \mathcal{L}(\gamma)), (\mathcal{P}(\beta), \mathcal{P}(w)))\|_{V \times Q}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Entonces, la demostración se sigue del término anterior, y usando las estimaciones del error para $\mathcal{P}$ (véase (3.2.18)) y $\mathcal{L}$ (véase (3.2.16)-(3.2.17)), y la Proposición 3.1.1. $\square$

El teorema anterior, implica que $\|\sigma - \sigma_h\|_{0,I} + \|\gamma - \gamma_h\|_{0,I} = O(h)$, pero es posible refinar esta estimación como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. *Bajo las suposiciones del Teorema 3.2.2*

$$\|(\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h)\|_Q := (\|\sigma - \sigma_h\|_{0,I}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{0,I}^2)^{1/2} \leq Ch^2 \|f\|_{1,I},$$

donde $C > 0$ es independiente de h and t .

Demostración. Recurriremos a un argumento de dualidad. Primero, consideremos el siguiente problema que está bien puesto: Dado $g = (g_1, g_2) \in L^2(I)^2$, hallar $((\phi, \rho), (\chi, u)) \in V \times Q$ tal que

$$a((\tau, \xi), (\phi, \rho)) + b((\tau, \xi), (\chi, u)) = (g, (\tau, \xi))_{0,I} \quad \forall (\tau, \xi) \in V, \quad (3.2.23)$$

$$b((\phi, \rho), (\eta, v)) = 0 \quad \forall (\eta, v) \in Q. \quad (3.2.24)$$

La única solución del problema anterior, satisface el siguiente resultado de regularidad adicional: Existe una constante $C > 0$, independiente de t and g tal que

$$\|u\|_{1,I} + \|\chi\|_{1,I} + \|\rho\|_{2,I} + \|\phi\|_{2,I} \leq C \|g\|_{0,I}. \quad (3.2.25)$$

En efecto, considerando una descomposición similar a (3.1.14) para la variable ρ (es decir, escribimos $\rho = \lambda' + r$, con $\lambda \in H_0^1(I)$ y $r := (\frac{1}{L} \int_I \rho) \in \mathbb{R}$), tenemos que el problema (3.2.23)–(3.2.24) y el siguiente son equivalentes: Dado $g = (g_1, g_2) \in L^2(I)^2$, hallar $(\lambda, \chi, r, u) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) \times \mathbb{R} \times H_0^1(I)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_I \lambda' v' = 0 \quad \forall v \in H_0^1(I), \\ \int_I \mathbb{E} \chi' \eta' + \int_I r \eta = - \int_I \mathbb{E} g_1 \eta' - \int_I \lambda' \eta \quad \forall \eta \in H_0^1(I), \\ \int_I \chi q - t^2 \int_I \frac{r q}{\kappa} = - \int_I g_2 q - t^2 \int_I \frac{\lambda' q}{\kappa} \quad \forall q \in \mathbb{R}, \\ \int_I u' \delta' = \int_I \chi \delta' + \int_I g_2 \delta' + t^2 \int_I \frac{\lambda' \delta'}{\kappa} \quad \forall \delta \in H_0^1(I). \end{array} \right. \quad (3.2.26)$$

De la primera de estas ecuaciones tenemos que $\lambda = 0$. Así, repitiendo los argumentos usados para demostrar la Proposición 3.1.1, concluimos el resultado de regularidad (3.2.25).

Por otro lado, escogiendo $(\tau, \xi) = (\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h)$ en el problema (3.2.23)–(3.2.24), obtenemos

$$(g, (\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h))_{0,I} = a((\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h), (\phi, \rho)) + b((\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h), (\chi, u)). \quad (3.2.27)$$

Restando (3.1.7) y (3.2.19) y usando (3.2.24), tenemos

$$\begin{aligned} a((\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h), (\phi_h, \rho_h)) &= -b((\phi_h, \rho_h), (\beta - \beta_h, w - w_h)) \\ &= b((\phi - \phi_h, \rho - \rho_h), (\beta - \beta_h, w - w_h)) \quad \forall (\phi_h, \rho_h) \in V_h. \end{aligned}$$

Por otro lado, de (3.1.8) y (3.2.20), también tenemos que

$$b((\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h), (\chi_h, u_h)) = 0 \quad \forall (\chi_h, u_h) \in Q_h.$$

Reemplazando los últimos dos términos en (3.2.27) obtenemos:

$$\begin{aligned} (g, (\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h))_{0,I} &= a((\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h), (\phi - \phi_h, \rho - \rho_h)) \\ &\quad + b((\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h), (\chi - \chi_h, u - u_h)) + b((\phi - \phi_h, \rho - \rho_h), (\beta - \beta_h, w - w_h)) \end{aligned}$$

para todo $(\phi_h, \rho_h) \in V_h$, y para todo $(\chi_h, u_h) \in Q_h$. De aquí,

$$\begin{aligned} |(g, (\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h))_{0,I}| &\leq C(\|(\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h)\|_V \|(\phi - \phi_h, \rho - \rho_h)\|_V \\ &\quad + \|(\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h)\|_V \|(\chi - \chi_h, u - u_h)\|_Q \\ &\quad + \|(\phi - \phi_h, \rho - \rho_h)\|_V \|(\beta - \beta_h, w - w_h)\|_Q) \\ &\leq Ch\|f\|_{1,I}(\|(\phi - \phi_h, \rho - \rho_h)\|_V + \|(\chi - \chi_h, u - u_h)\|_Q) \end{aligned}$$

para todo $(\phi_h, \rho_h) \in V_h$ and $(\chi_h, u_h) \in Q_h$, donde para la última desigualdad usamos el Teorema 3.2.2. Escogiendo de forma particular $(\phi_h, \rho_h) := (\mathcal{L}(\phi), \mathcal{L}(\rho))$ y $(\chi_h, u_h) := (\mathcal{P}(\chi), \mathcal{P}(u))$ en la cota anterior:

$$\begin{aligned} |(g, (\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h))_{0,I}| &\leq Ch\|f\|_{1,I}(\|(\phi - \mathcal{L}(\phi), \rho - \mathcal{L}(\rho))\|_V + \|(\chi - \mathcal{P}(\chi), u - \mathcal{P}(u))\|_Q) \\ &\leq Ch^2\|f\|_{1,I}(\|\phi\|_{2,I} + \|\rho\|_{2,I} + \|\chi\|_{1,I} + \|u\|_{1,I}) \\ &\leq Ch^2\|f\|_{1,I}\|g\|_{0,I}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad, primero consideramos las estimaciones de error para $\mathcal{P}$ (ver (3.2.18)) y $\mathcal{L}$ (ver (3.2.16)-(3.2.17)), y luego el resultado de regularidad adicional (3.2.25).

Finalmente, de la estimación anterior tenemos que:

$$\|(\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h)\|_Q = \sup_{\substack{g \in L^2(I)^2 \\ g \neq 0}} \frac{(g, (\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h))_{0,I}}{\|g\|_{0,I}} \leq Ch^2\|f\|_{1,I},$$

donde la constante C es independiente de h y t .

Esto completa la demostración. □

Observación 3.2.1. *Es posible refinar los Teoremas 3.2.2 y 3.2.3, considerando cargas suaves a trozos. Consideremos una familia de particiones de I*

$$\tilde{\mathcal{T}}_h := 0 = x_0 < \cdots < x_N = L,$$

los cuales son refinamientos de la partición inicial $0 = s_0 < \cdots < s_n = L$ (ver la Observación 3.1.1). Denotamos $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, N$, y notamos que para cualquier malla $\tilde{\mathcal{T}}_h$, cada I_j está contenida en algún subintervalo S_i , $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, si $f|_{S_i} \in H^1(S_i) \forall i = 1 \dots n$, entonces,

$$\|((\sigma, \gamma), (\beta, w)) - ((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h))\|_{V \times Q} \leq Ch \left(\|f\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2},$$

y

$$\|(\sigma - \sigma_h, \gamma - \gamma_h)\|_Q \leq \hat{C}h^2 \left(\|f\|_{0,I}^2 + \sum_{i=1}^n \|f'\|_{0,S_i}^2 \right)^{1/2},$$

donde las constantes $C, \hat{C} > 0$ son independientes de h y t . En efecto, la primera estimación se sigue de la desigualdad (3.2.22), el carácter local del interpolante de Lagrange de γ y el resultado de regularidad adicional dado en la observación 3.1.1. A su vez, la segunda estimación se sigue de la primera y del Teorema 3.2.3.

3.3. Resultados Numéricos.

Presentamos en esta sección algunos experimentos numéricos que confirman los resultados numéricos obtenidos anteriormente. El método numérico fue implementado en un código MATLAB.

En lo que sigue, N denotará el número de grados de libertad, donde, $N := \dim(V_h \times Q_h)$. Por otro lado, definimos los errores individuales por:

$$\mathbf{e}_0(\sigma) := \|\sigma - \sigma_h\|_{0,I}, \quad \mathbf{e}_1(\sigma) := \|\sigma' - \sigma'_h\|_{0,I}, \quad \mathbf{e}_0(\gamma) := \|\gamma - \gamma_h\|_{0,I},$$

$$\mathbf{e}_1(\gamma) := \|\gamma' - \gamma'_h\|_{0,I}, \quad \mathbf{e}_0(\beta) := \|\beta - \beta_h\|_{0,I}, \quad \mathbf{e}_0(w) := \|w - w_h\|_{0,I},$$

donde $((\sigma, \gamma), (\beta, w)) \in V \times Q$ and $((\sigma_h, \gamma_h), (\beta_h, w_h)) \in V_h \times Q_h$ son las soluciones de los problemas (3.1.7)-(3.1.8) y (3.2.19)-(3.2.20), respectivamente.

Definimos las tasas experimentales de convergencia (rc_i) para los errores $\mathbf{e}_i(\cdot)$ por

$$\text{rc}_i(\cdot) := \frac{\log(\mathbf{e}_i(\cdot)/\mathbf{e}'_i(\cdot))}{\log(h/h')} \quad i = 0, 1,$$

donde h and h' denotan dos tamaños de mallas sucesivas $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}'$, denota los errores correspondientes.

Test 1 Para esta prueba, las funciones usadas, para hallar las soluciones exactas del problema serán $f(x) = e^x$, $\mathbb{E}(x) = e^x$ y $\kappa(x) = e^{-x}$. Con estas funciones, encontramos las siguientes soluciones exactas en el intervalo $I = [0, 1]$

$$\beta(x) = x - c_1[(x+1)e^x - 1] - c_2[e^{-x} - 1]$$

$$w(x) = \frac{x^2}{2} + c_1[(x+2)e^{-x} + x + t^2(1 - e^x) - 2] + c_2[e^{-x} + x - 1] + \frac{t^2}{2}(1 - e^{2x})$$

$$\sigma(x) = e^x + c_1x + c_2$$

$$\gamma(x) = e^x + c_1$$

donde c_1 y c_2 son las constantes definidas por

$$c_1 = \frac{t^2(e^2 - 1) - \frac{2}{1-e} - 1}{6e^{-1} + 2t^2(1-e) - \frac{2(e^{-1} - 1)}{1-e}}$$

$$c_2 = \frac{1 - c_1(2e^{-1} - 1)}{e^{-1} - 1}$$

a) Para $t = 0.1$

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	6.6267e-3	8.4909e-2	9.0786e-4	8.5294e-2	1.0755e-3	2.7464e-3
9	8	1.6594e-3	4.4049e-2	2.2892e-4	4.4151e-2	5.4061e-4	1.4640e-3
17	16	4.1502e-4	2.2416e-2	5.7352e-5	2.2442e-2	2.7045e-4	7.4350e-4
33	32	1.0376e-4	1.1305e-2	1.4345e-5	1.1311e-2	1.3524e-4	3.7319e-4
65	64	2.5942e-5	5.6766e-3	3.5869e-6	5.6782e-3	6.7622e-5	1.8677e-4
129	128	6.4855e-6	2.8442e-3	8.9675e-7	2.8447e-3	3.3811e-5	9.3411e-5

3.3. Resultados Numéricos.

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.00	0.95	1.99	0.95	0,99	0,91
17	16	2.00	0.97	2.00	0.98	1.00	0,98
33	32	2.00	0.99	2.00	0.99	1.00	0,99
65	64	2.00	0.99	2.00	0.99	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

b) Para $t = 0.01$

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	6.5984e-3	8.4139e-2	1.0509e-4	8.5294e-2	4.3062e-4	2.4883e-3
9	8	1.6503e-3	4.3854e-2	2.6532e-5	4.4151e-2	2.1207e-4	1.3298e-3
17	16	4.1261e-4	2.2367e-2	6.6392e-6	2.2442e-2	1.0524e-4	6.7573e-4
33	32	1.0315e-4	1.1292e-2	1.6633e-6	1.1311e-2	5.2508e-5	3.3922e-4
65	64	2.5789e-5	5.6735e-3	4.1589e-7	5.6782e-3	2.6239e-5	1.6978e-4
129	128	6.4473e-6	2.8435e-3	1.0397e-7	2.8447e-3	1.3118e-5	8.4912e-5

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.00	0.94	1.99	0.95	1.02	0,90
17	16	2.00	0.97	2.00	0.98	1.01	0,98
33	32	2.00	0.99	2.00	0.99	1.00	0,99
65	64	2.00	0.99	2.00	0.994	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

c) Para $t = 0.001$

3.3. Resultados Numéricos.

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	6.5984e-3	8.4128e-2	1.0529e-5	8.5294e-2	4.2526e-4	2.4861e-3
9	8	1.6502e-3	4.3851e-2	2.6584e-6	4.4151e-2	2.0937e-4	1.3285e-3
17	16	4.1260e-4	2.2366e-2	6.6623e-7	2.2442e-2	1.0389e-4	6.7511e-4
33	32	1.0315e-4	1.1292e-2	1.6665e-7	1.1311e-2	5.1832e-5	3.3891e-4
65	64	2.5788e-5	5.6735e-3	4.1670e-8	5.6782e-3	2.5901e-5	1.6962e-4
129	128	6.4471e-6	2.8435e-3	1.0418e-8	2.8447e-3	1.2949e-5	8.4834e-5

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.00	0.94	1.99	0.95	1.02	0.90
17	16	2.00	0.97	2.00	0.98	1.01	0.98
33	32	2.00	0.99	2.00	0.99	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	0.99	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

d) Para $t = 0.00001$

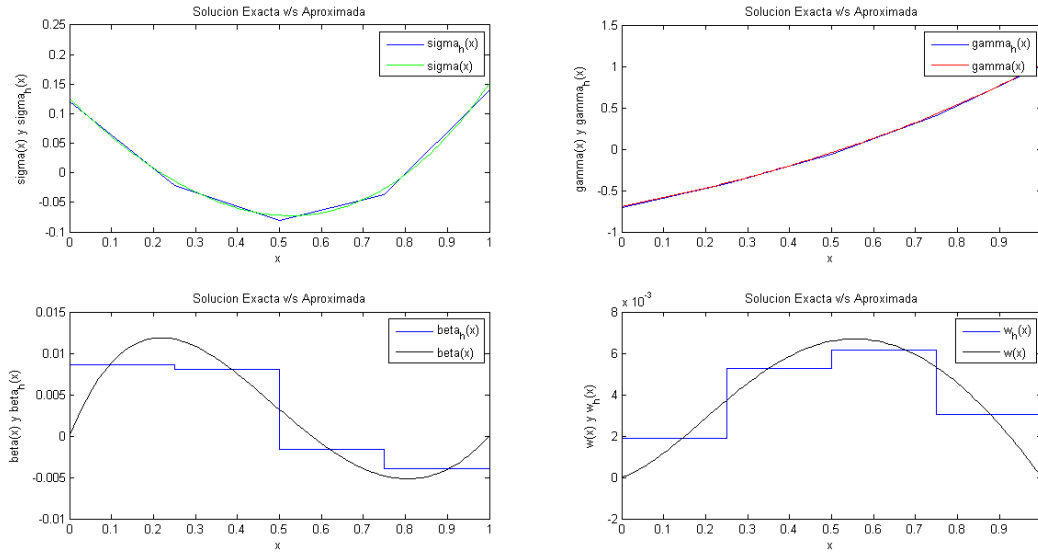
N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	6.5984e-3	8.4128e-2	1.0529e-7	8.5294e-2	4.2520e-4	2.4861e-3
9	8	1.6502e-3	4.3851e-2	2.6584e-8	4.4151e-2	2.0935e-4	1.3285e-3
17	16	4.1260e-4	2.2366e-2	6.6624e-9	2.2442e-2	1.0387e-4	6.7510e-4
33	32	1.0315e-4	1.1292e-2	1.6666e-9	1.1311e-2	5.1825e-5	3.3891e-4
65	64	2.5788e-5	5.6735e-3	4.1671e-10	5.6782e-3	2.5898e-5	1.6962e-4
129	128	6.4471e-6	2.8435e-3	1.0418e-10	2.8447e-3	1.2947e-5	8.4833e-5

3.3. Resultados Numéricos.

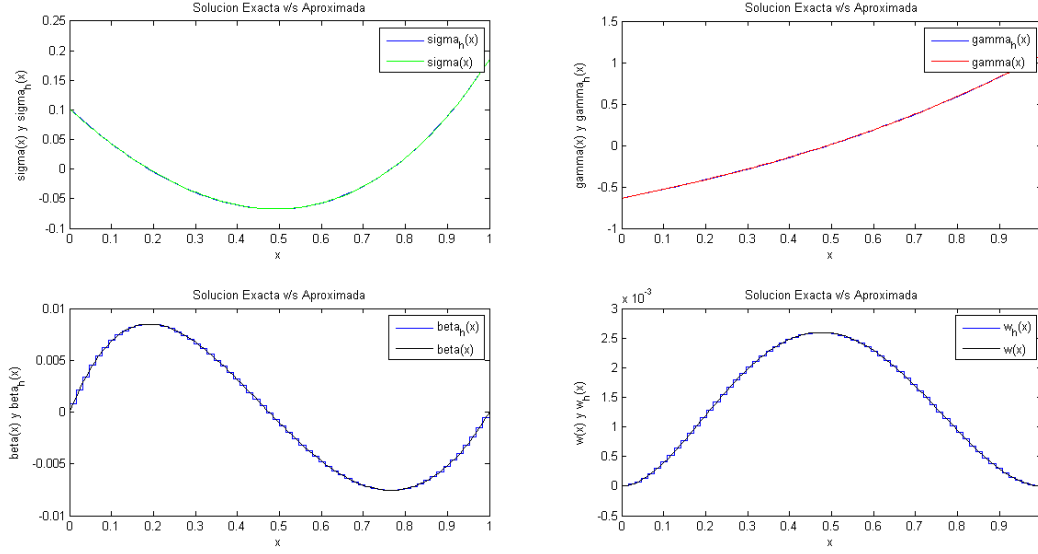
N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.00	0.94	1.99	0.95	1.02	0.90
17	16	2.00	0.97	2.00	0.98	1.01	0.98
33	32	2.00	0.99	2.00	0.99	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	0.99	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

Podemos apreciar en este ejemplo, que los errores calculados disminuyen a medida que refinamos el intervalo de trabajo, y además, que para diferentes valores del espesor de la viga, existe convergencia del método, independientemente del valor de dicho espesor. Los rangos de convergencia son los que teóricamente se esperan.

Mostramos algunas gráficas que permiten apreciar cómo se aproxima nuestro método de elementos finitos



Test 1 con $t = 0.1$ y $N = 5$



Test 1 con $t = 0.001$ y $N = 65$

Test 2 Para esta prueba, las funciones usadas, para hallar las soluciones exactas del problema serán $f(x) = \cos(x)$, $\mathbb{E}(x) = 1$ y $\kappa(x) = 1$. Así, nuestras soluciones exactas son:

$$\beta(x) = -\sin(x) + x^2 \frac{c_1}{2} + xc_2$$

$$w(x) = \cos(x) + x^3 \frac{c_1}{6} + x^2 \frac{c_2}{2} + t^2 \cos(x) - t^2 c_1 x - 1 - t^2$$

$$\sigma(x) = -\cos(x) + c_1 x + c_2$$

$$\gamma(x) = \sin(x) + c_1$$

donde c_1 y c_2 son las constantes definidas como

$$c_1 = \frac{6 \sin(1) + 12t^2 \cos(1) + 12 \cos(1) - 12t^2 - 12}{12t^2 + 1}$$

$$c_2 = \frac{6t^2 + (-6 - 6t^2) \cos(1) + (12t^2 - 2) \sin(1) + 6}{12t^2 + 1}$$

Luego, los resultados numéricos obtenidos, para distintas particiones del intervalo $(0, 1)$ y distintos valores de t son los siguientes

a) Para $t = 0.1$

3.3. Resultados Numéricos.

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_1(\beta)$
5	4	3.1546e-3	4.5249e-2	2.9001e-4	2.4323e-2	5.2599e-4	2.1414e-3
9	8	7.8813e-4	2.2204e-2	7.4126e-5	1.2764e-2	2.6056e-4	1.1381e-3
17	16	1.9699e-4	1.0992e-2	1.8633e-5	6.5245e-3	1.2969e-4	5.7746e-4
33	32	4.9247e-5	5.4682e-3	4.6648e-6	3.2968e-3	6.4765e-5	2.8978e-4
65	64	1.2311e-5	2.7271e-3	1.1666e-6	1.6569e-3	3.2372e-5	1.4502e-4
129	128	3.0779e-6	1.3617e-3	2.9167e-7	8.3062e-4	1.6184e-5	7.2527e-5

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.00	1.03	1.97	0.93	1.01	0.91
17	16	2.00	1.01	1.99	0.97	1.00	0.99
33	32	2.00	1.01	2.00	0.98	1.00	0.99
65	64	2.00	1.00	2.00	0.99	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	2.00	1.00	1.00

b) Para $t = 0.01$

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	3.1540e-3	4.5349e-2	3.0822e-5	2.4323e-2	3.7291e-4	2.1411e-3
9	8	7.8792e-4	2.2230e-2	7.8937e-6	1.2764e-2	1.8241e-4	1.1380e-3
17	16	1.9694e-4	1.0998e-2	1.9852e-6	6.5245e-3	9.0305e-5	5.7744e-4
33	32	4.9233e-5	5.4699e-3	4.9705e-7	3.2968e-3	4.5026e-5	2.8977e-4
65	64	1.2308e-5	2.7275e-3	1.2431e-7	1.6569e-3	2.2496e-5	1.4501e-4
129	128	3.0770e-6	1.3628e-3	3.1080e-8	8.3062e-4	1.1246e-5	7.2525e-5

3.3. Resultados Numéricos.

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.00	1.03	1.97	0.93	1.03	0.91
17	16	2.00	1.02	1.99	0.97	1.01	0.98
33	32	2.00	1.01	2.00	0.98	1.00	0.99
65	64	2.00	1.00	2.00	0.99	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

c) Para $t = 0.001$

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	3.1540e-3	4.5350e-2	3.0843e-6	2.4323e-2	3.7147e-4	2.1411e-3
9	8	7.8792e-4	2.2231e-2	7.8992e-7	1.2764e-2	1.8168e-4	1.1380e-3
17	16	1.9694e-4	1.0999e-2	1.9866e-7	6.5245e-3	8.9934e-5	5.7744e-4
33	32	4.9233e-5	5.4699e-3	4.9740e-8	3.2968e-3	4.4840e-5	2.8977e-4
65	64	1.2308e-5	2.7275e-3	1.2439e-8	1.6569e-3	2.2403e-5	1.4501e-4
129	128	3.0770e-6	1.3618e-3	3.1102e-9	8.3062e-4	1.1199e-5	7.2525e-5

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.00	1.01	1.97	0.93	1.03	0.911
17	16	2.00	1.01	1.99	0.97	1.01	0.98
33	32	2.00	1.01	2.00	0.98	1.00	0.99
65	64	2.00	1.00	2.00	0.99	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

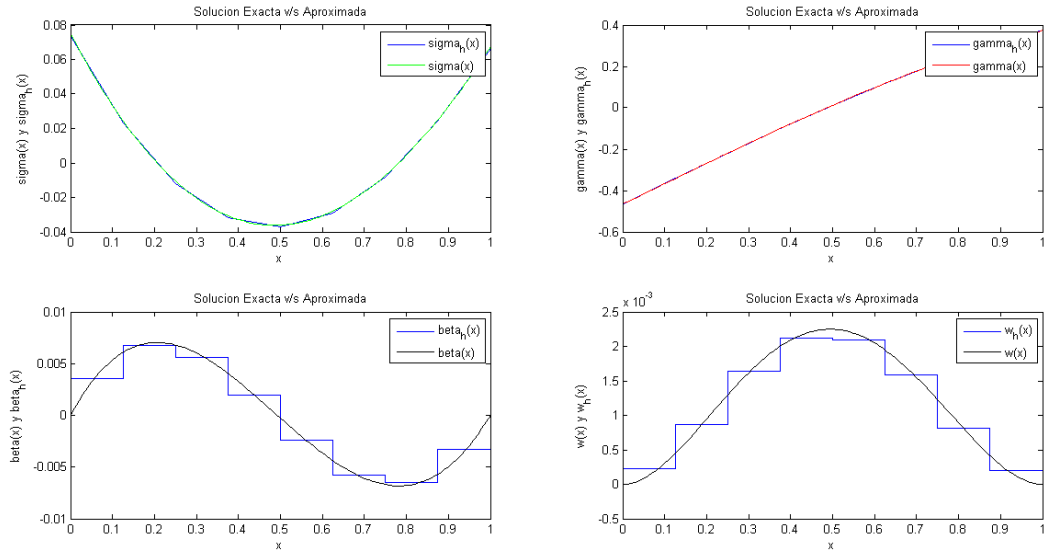
d) Para $t = 0.00001$

3.3. Resultados Numéricos.

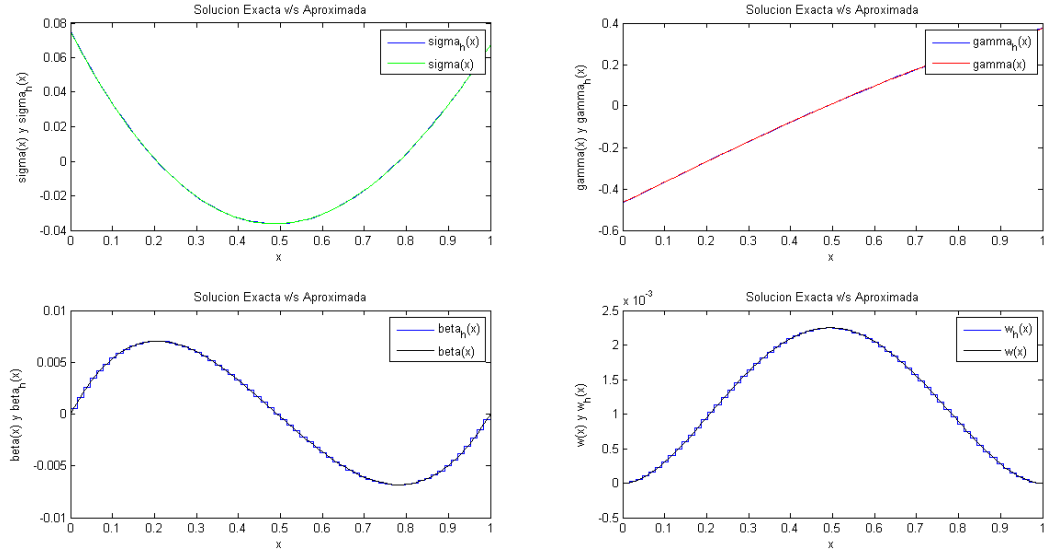
N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	3.1540e-3	4.5350e-2	3.0843e-8	2.4323e-2	3.7146e-4	2.1411e-3
9	8	7.8792e-4	2.2231e-2	7.8992e-9	1.2764e-2	1.8167e-4	1.1380e-3
17	16	1.9694e-4	1.0999e-2	1.9866e-9	6.5245e-3	8.9931e-5	5.7744e-4
33	32	4.9233e-5	5.4699e-3	4.9741e-10	3.2968e-3	4.4838e-5	2.8977e-4
65	64	1.2308e-5	2.7275e-3	1.2439e-10	1.6569e-3	2.2402e-5	1.4501e-4
129	128	3.0770e-6	1.3618e-3	3.1102e-11	8.3062e-4	1.1199e-5	7.2525e-5

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.00	1.03	1.97	0.93	1.03	0.91
17	16	2.00	1.01	1.99	0.97	1.01	0.98
33	32	2.00	1.01	2.00	0.98	1.00	0.99
65	64	2.00	1.00	2.00	0.99	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

Mostramos a continuación algunas graficas que muestran cómo el método de aproxima a las soluciones exactas, independientes del espesor de la viga.



Test 2 con $t = 0.01$ y $N = 9$



Test 2 con $t = 0.00001$ y $N = 65$

Test 3 Para este ejemplo consideramos la funcion $f(x) = x$ y las funciones definidas por tramos

$$\mathbb{E}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ e^{-x} & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\kappa(x) = \begin{cases} e^x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{1}{x} & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

implementamos estas funciones con el método propuesto, para distintos valores del parámetro t para obtener los siguientes resultados numéricos.

a) Para $t = 0.1$

3.3. Resultados Numéricos.

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	2.1438e-3	2.5833e-2	5.8391e-4	5.1031e-2	4.3275e-4	2.1477e-3
9	8	5.3314e-4	1.3824e-2	1.5149e-4	2.5515e-2	2.1397e-4	1.1737e-3
17	16	1.3308e-4	7.1401e-3	3.8224e-5	1.2757e-2	1.0627e-4	6.0011e-4
33	32	3.3259e-5	3.6266e-3	9.5781e-6	6.3788e-3	5.3031e-5	3.0174e-4
65	64	8.3140e-6	1.8274e-3	2.3959e-6	3.1894e-3	2.6501e-5	1.5108e-4
129	128	2.0784e-6	9.1721e-4	5.9906e-7	1.5947e-3	1.3249e-5	7.5567e-5

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.01	0.90	1.95	1.00	1.02	0.87
17	16	2.00	0.95	1.99	1.00	1.01	0.97
33	32	2.00	0.98	2.00	1.00	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00
129	128	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00

b) Para $t = 0.01$

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	2.1410e-3	2.5740e-2	6.0559e-5	5.1031e-2	3.5555e-4	2.1488e-3
9	8	5.3258e-4	1.3799e-2	1.5737e-5	2.5515e-2	1.7495e-4	1.1745e-3
17	16	1.3295e-4	7.1336e-3	3.9724e-6	1.2757e-2	8.6649e-5	6.0058e-4
33	32	3.3227e-5	3.6250e-3	9.9549e-7	6.3788e-3	4.3202e-5	3.0198e-4
65	64	8.3060e-6	1.8270e-3	2.4902e-7	3.1894e-3	2.1585e-5	1.5120e-4
129	128	2.0764e-6	9.1711e-4	6.2265e-8	1.5947e-3	1.0790e-5	7.5627e-5

3.3. Resultados Numéricos.

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.01	0.90	1.94	1.00	1.02	0.87
17	16	2.00	0.95	1.99	1.00	1.01	0.97
33	32	2.00	0.98	2.00	1.00	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00
129	128	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	01.00

c) Para $t = 0.001$

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma')$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	2.1410e-3	2.5739e-2	6.0582e-6	5.1031e-2	3.5481e-4	2.1488e-3
9	8	5.3258e-4	1.3798e-2	1.5743e-6	2.5515e-2	1.7458e-4	1.1745e-3
17	16	1.3295e-4	7.1335e-3	3.9740e-7	1.2757e-2	8.6463e-5	6.0059e-4
33	32	3.3227e-5	3.6250e-3	9.9589e-8	6.3788e-3	4.3108e-5	3.0198e-4
65	64	8.3060e-6	1.8270e-3	2.4912e-8	3.1894e-3	2.1538e-5	1.5120e-4
129	128	2.0764e-6	9.1711e-4	6.2290e-9	1.5947e-3	1.0767e-5	7.5628e-5

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.01	0.90	1.94	1.00	1.02	0.87
17	16	2.00	0.95	1.99	1.00	1.01	0.97
33	32	2.00	0.98	2.00	1.00	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00
129	128	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00

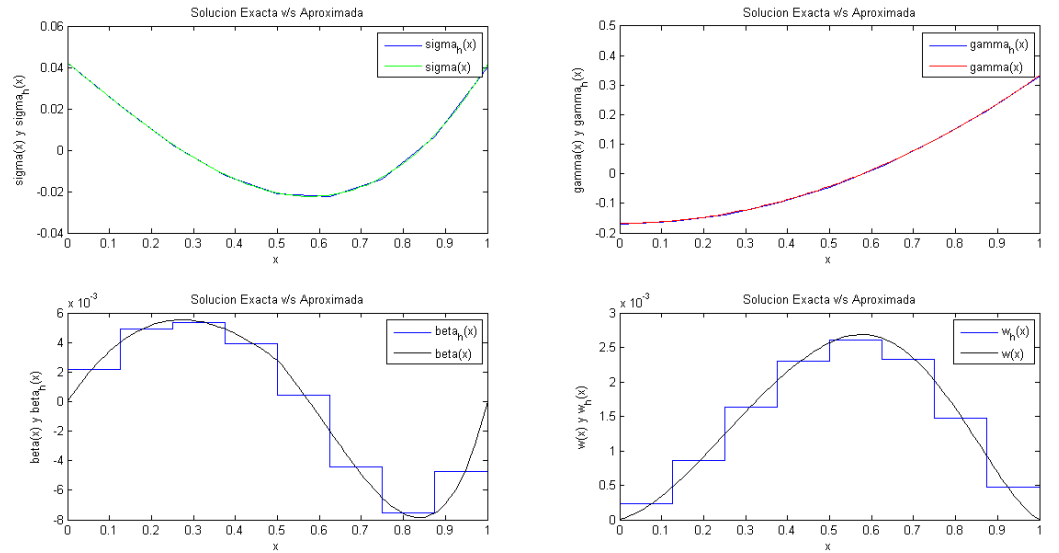
d) Para $t = 0.00001$

3.3. Resultados Numéricos.

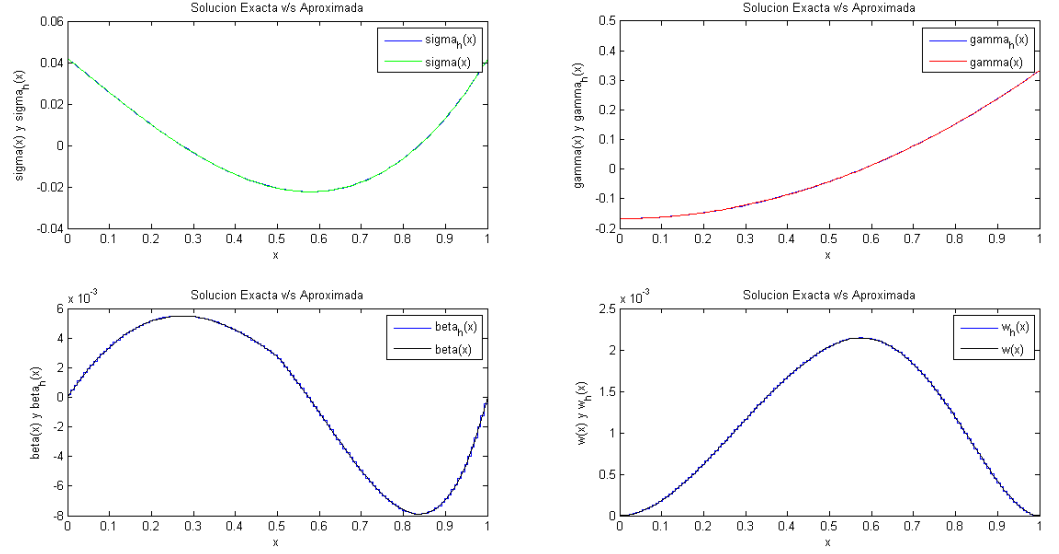
N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	2.1410e-3	2.5739e-2	6.0582e-8	5.1031e-2	3.5480e-4	2.1488e-3
9	8	5.3258e-4	1.3798e-2	1.5743e-8	2.5515e-2	1.7458e-4	1.1745e-3
17	16	1.3295e-4	7.1335e-3	3.9740e-9	1.2757e-2	8.6461e-5	6.0069e-4
33	32	3.3227e-5	3.6250e-3	9.9590e-10	6.3788e-3	4.3107e-5	3.0198e-4
65	64	8.3060e-6	1.8270e-3	2.4912e-10	3.1894e-3	2.1537e-5	1.5120e-4
129	128	2.0764e-6	9.1711e-4	6.2290e-11	1.5947e-3	1.0766e-5	7.5628e-5

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.01	0.90	1.94	1.00	1.02	0.87
17	16	2.00	0.95	1.99	1.00	1.01	0.97
33	32	2.00	0.98	2.00	1.00	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00
129	128	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00

Mostramos a continuación algunas gráficas que nos permiten apreciar la aproximación del método a las soluciones exactas, para distintos valores del espesor de la viga y distintos tamaños de malla.



Test 3 con $t = 0.1$ y $N = 9$



Test 3 con $t = 0.00001$ y $N = 129$

Este ejemplo es interesante de analizar, ya que consideramos funciones exactas que cambian de definición en cierto punto de la viga, convirtiéndola en una viga no homogénea, en por lo menos un punto. A pesar de la naturaleza de las funciones, los datos numéricos muestran que el método de elementos finitos propuesto converge, y más aún, esta convergencia es independiente del grosor de la viga tal como fue demostrado teóricamente.

Test 4 Para este test consideramos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ e^x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ e^{-x} & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\kappa(x) = \begin{cases} e^x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{1}{x} & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Notamos que estas tres funciones son discontinuas en $x = 0.5$. Estudiaremos la convergencia del método de elementos finitos para distintos valores de t .

a) Para $t = 0.1$

3.3. Resultados Numéricos.

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	5.9722e-3	7.1091e-2	1.6503e-2	1.2111e-1	1.0449e-3	5.2725e-3
9	8	1.4819e-3	3.7402e-2	4.2572e-3	6.0710e-2	5.1791e-4	2.9011e-3
17	16	3.6977e-4	1.9182e-2	1.0726e-3	3.0374e-2	2.5726e-4	1.4859e-3
33	32	9.2398e-5	9.7129e-3	2.6868e-4	1.5189e-2	1.2837e-4	7.4748e-4
65	64	2.3096e-5	4.8869e-3	6.7203e-5	7.5950e-3	6.4154e-5	3.7430e-4
129	128	5.7740e-6	2.4510e-3	1.6802e-5	3.7975e-3	3.2073e-5	1.8722e-4

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.01	0.93	1.95	1.00	1.02	0.86
17	16	2.00	0.96	1.99	1.00	1.01	0.97
33	32	2.00	0.98	2.00	1.00	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

b) Para $t = 0.01$

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	5.9604e-3	7.0819e-2	1.7351e-2	1.2111e-1	8.5820e-4	5.2841e-3
9	8	1.4797e-3	3.7329e-2	4.4779e-3	6.6071e-2	4.2341e-4	2.9093e-3
17	16	3.6926e-4	1.9164e-2	1.1283e-3	3.0374e-2	2.0970e-4	1.4903e-3
33	32	9.2276e-5	9.7082e-3	2.8264e-4	1.5189e-2	1.0455e-4	7.4969e-4
65	64	2.3066e-5	4.8857e-3	7.0696e-5	7.5950e-3	5.2235e-5	3.7541e-4
129	128	5.7664e-6	2.4507e-3	1.7676e-5	3.7975e-3	2.6112e-5	1.8777e-4

3.3. Resultados Numéricos.

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.01	0.92	1.95	1.00	1.02	0.86
17	16	2.00	0.96	1.99	1.00	1.01	0.97
33	32	2.00	0.98	2.00	1.00	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

c) Para $t = 0.001$

N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	5.9604e-3	7.0816e-2	1.7360e-2	1.2111e-1	8.5641e-4	5.2842e-3
9	8	1.4797e-3	3.7328e-2	4.4802e-3	6.0710e-2	4.2251e-4	2.9093e-3
17	16	3.6926e-4	1.9163e-2	1.1289e-3	3.0374e-2	2.0925e-4	1.4903e-3
33	32	9.2276e-5	9.7081e-3	2.8279e-4	1.5189e-2	1.0432e-4	7.4971e-4
65	64	2.3066e-5	4.8857e-3	7.0734e-5	7.5950e-3	5.2122e-5	3.7542e-4
129	128	5.7664e-6	2.4507e-3	1.7685e-5	3.7975e-3	2.6056e-5	1.8778e-4

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.01	0.92	1.95	1.00	1.02	0.86
17	16	2.00	0.96	1.99	1.00	1.01	0.97
33	32	2.00	0.98	2.00	1.00	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

d) Para $t = 0.00001$

3.3. Resultados Numéricos.

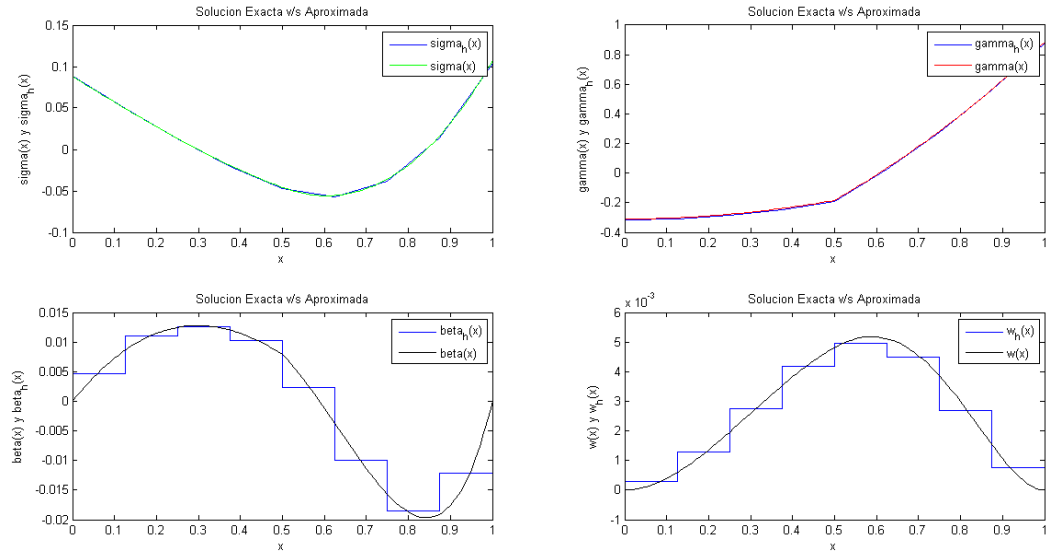
N	1/h	$\mathbf{e}_0(\sigma)$	$\mathbf{e}_1(\sigma)$	$\mathbf{e}_0(\gamma)$	$\mathbf{e}_1(\gamma)$	$\mathbf{e}_0(w)$	$\mathbf{e}_0(\beta)$
5	4	5.9604e-3	7.0816e-2	1.7360e-2	1.2111e-1	8.5640e-4	5.2842e-3
9	8	1.4797e-3	3.7328e-2	4.4803e-3	6.0710e-2	4.2250e-4	2.9093e-3
17	16	3.6926e-4	1.9163e-2	1.1289e-3	3.0374e-2	2.0924e-4	1.4903e-3
33	32	9.2276e-5	9.7081e-3	2.8279e-4	1.5189e-2	1.0432e-4	7.4971e-4
65	64	2.3066e-5	4.8857e-3	7.0734e-5	7.5950e-3	5.2121e-5	3.7542e-4
129	128	5.7664e-6	2.4507e-3	1.7685e-5	3.7975e-3	2.6055e-5	1.8778e-4

N	1/h	$rc_0(\sigma)$	$rc_1(\sigma)$	$rc_0(\gamma)$	$rc_1(\gamma)$	$rc_0(w)$	$rc_1(\beta)$
5	4	—	—	—	—	—	—
9	8	2.01	0.92	1.95	1.00	1.02	0.86
17	16	2.00	0.96	1.99	1.00	1.01	0.97
33	32	2.00	0.98	2.00	1.00	1.00	0.99
65	64	2.00	0.99	2.00	1.00	1.00	1.00
129	128	2.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.00

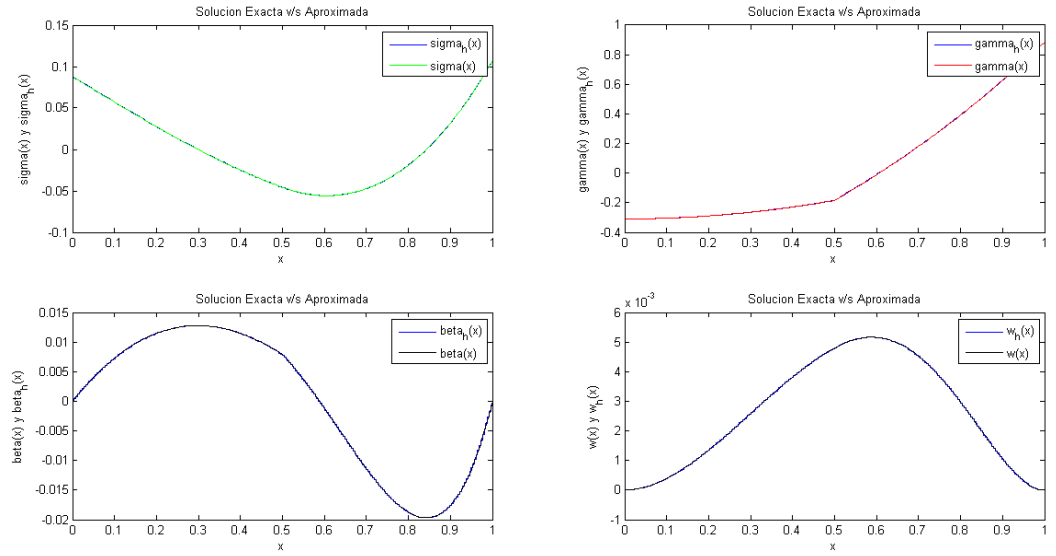
En esta prueba, consideramos una carga $f(x)$ suave a trozos , donde el punto de discontinuidad es $x = 0.5$, punto que consideramos parte de las distintas mallas usadas para el experimento. Notamos que para distintos valores de t , el método de elementos finitos converge, y las tasas de convergencia son $O(h)$ y $O(h^2)$ tal como se señaló en las observaciones anteriores.

A continuación, presentamos algunas gráficas que muestran cómo nuestro método de elementos finitos aproxima nuestras funciones exactas, para distintos valores del parámetro t y distintas mallas.

3.3. Resultados Numéricos.



Test 4 con $t = 0.01$ y $N = 9$



Test 4 con $t = 0.00001$ y $N = 257$

Capítulo 4

Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo, hemos estudiado un método de elementos finitos mixto para poder aproximar la flexión de una viga de Timoshenko no homogénea. Estudiamos una formulación variacional mixta alternativa a las que usualmente se estudian, donde introducimos como variables el momento de inercia, el esfuerzo de corte, la rotación de las fibras y el desplazamiento transversal, donde la primera y las segunda tienen mucho interés en ingeniería hoy en día.

Analizamos esta formulación variacional desde el punto de vista de la teoría clásica de Babuška-Brezzi. Las demostraciones fueron hechas considerando la no homogeneidad de las vigas tanto en sus propiedades físicas como geométricas, y el método propuesto resulta libre de bloqueo.

Con respecto a la aproximación numérica usamos espacios de elementos finitos clásicos, como las funciones $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_0$, y demostramos la convergencia lineal para el desplazamiento transversal y la rotación, y una convergencia cuadrática para el error de aproximación del momento flector y del esfuerzo de corte.

Un trabajo futuro posible de considerar es el siguiente:

- a) Considerar otras condiciones de contorno para la viga de Timoshenko no homogénea.
- b) Extender las ideas presentadas en esta tesis para la viga de Reddy-Bickford.

Bibliografia

- [1] D. N. ARNOLD, Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem. *Numer. Math.* 37 (1981) 405–421.
- [2] L. BEIRÃO DA VEIGA, C. LOVADINA AND A. REALI, Avoiding shear locking for the Timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 241-244 (2012) 38-51.
- [3] L. BEIRÃO DA VEIGA, D. MORA AND R. RODRÍGUEZ, Numerical analysis of a locking-free mixed finite element method for a bending moment formulation of Reissner-Mindlin plate model. *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, 29 (2013) 40-63.
- [4] F. BREZZI AND M. FORTIN, Mixed and Hybrid Finite Element Methods. *Springer-Verlag*, New York (1991).
- [5] F. CELIKER, B. COCKBURN AND H. K. STOLARSKI, Locking-free optimal discontinuous Galerkin methods for Timoshenko beams. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44 (2006) 2297-2325.
- [6] F. CELIKER, B. COCKBURN AND K. SHI , Hybridizable discontinuous Galerkin methods for Timoshenko beams. *J. Sci. Comp.*, 44 (2010) 1-37.
- [7] F. CELIKER, B. COCKBURN AND K. SHI , A projection-based error analysis of HDG methods for Timoshenko beams. *Math. Comp.*, 81 (2012) 131-151.
- [8] R. S. FALK, Finite Elements for the Reissner-Mindlin Plate, in Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications, D. Boffi and L. Gastaldi, eds., *Springer-Verlag*, Berlin (2008) 195-230.
- [9] A.J.M FERREIRA AND G.E. FASSHAUER, Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF-pseudospectral method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 (2006) 134-146.

- [10] H. HERNÁNDEZ AND E. OTÁROLA, A locking-free FEM in active vibration control of a Timoshenko beam. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47 (2009) 2432-2454.
- [11] L. LI, Discretization of the Timoshenko beam problem by the p and the $h - p$ versions of the finite element method. *Numer. Math.*, 57 (1990) 413-420.
- [12] A. F.D. LOULA, T. J. R. HUGHES AND L. P. FRANCA, Petrov-Galerkin formulations of the Timoshenko beam problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 63 (1987) 115-132.
- [13] A. F.D. LOULA, T. J. R. HUGHES, L. P. FRANCA AND I. MIRANDA, Mixed Petrov-Galerkin methods for the Timoshenko beam problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 63 (1987) 133-154.
- [14] C. LOVADINA, D. MORA AND R. RODRÍGUEZ, A locking-free finite element method for the buckling problem of a non-homogeneous Timoshenko beam. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 45 (2011) 603-626.
- [15] A. H. NIEMI, J. A. BRAMWELL AND L. F. DEMKOWICZ, Discontinuous Petrov-Galerkin method with optimal test functions for thin-body problems in solid mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200 (2011) 1291-1300.
- [16] J.N. REDDY, An Introduction to the Finite Element Method. *McGraw-Hill*, New York (1993)
- [17] S.P. TIMOSHENKO, On the correction for shear of differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Phil. Mag.*, 41 (1921) 744-746.
- [18] S.P. TIMOSHENKO, On the Transverse Vibrations of bars of Uniform Cross-Section. *Phil. Mag.*, 43 (1922) 125-131.
- [19] G. VADILLO, J.A. LOYA AND J. FERNÁNDEZ-SÁEZ, First order solutions for the buckling loads of weakened Timoshenko columns. *Comput. Math. Appl.*, (2012) 2395-2407.
- [20] C.M. WANG, J.N. REDDY AND K.H. LEE, Shear deformable beams and plates: relationships with classical solutions, *Elsevier*, Oxford 2000.