

¿ Qué es una P.D.E?

Una ecuación diferencial parcial son ecuaciones diferenciales que contienen **Derivadas Parciales** de la función incógnita.

Si, u es la función incógnita de la ecuación en las $d+1$ variables independientes

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \text{ y } "t",$$

ESCRIBIMOS

$$P(u, g) = F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \dots, \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_d + p_t} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_d^{p_d} \partial t^{p_t}}\right) = 0,$$

donde g es un dato y $p_1 + \dots + p_d + p_t \in \mathbb{N}$.

Decimos que $P(u, g) = 0$ es una **P.D.E. genérica**.

¿ Dónde planteamos las P.D.E.?

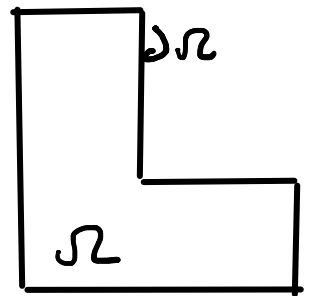
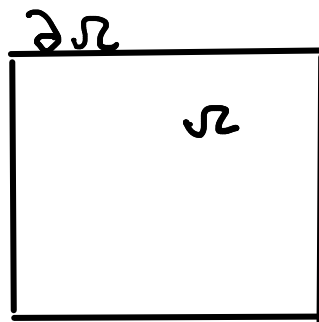
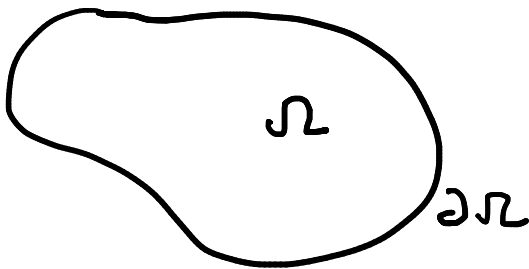
Las P.D.E. las planteamos en ciertos **dominios**. Denotamos por $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, con m la dimensión, una región del espacio donde se satisface la E.D.P.

Suponemos que Ω es ABIERTO y ACOTADO
y que su frontera, denotada por $\partial\Omega$,
es suficientemente regular.

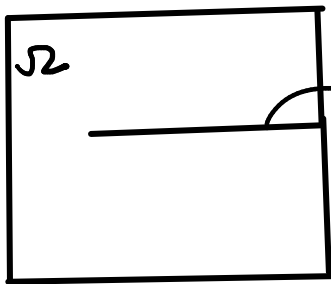
Además, definimos

$$\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$$

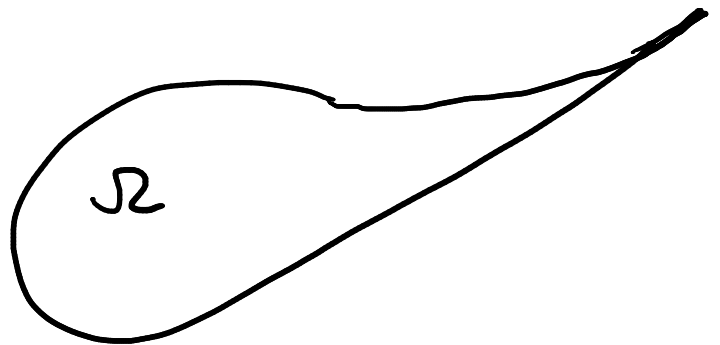
Ejemplos: en $\mathbb{R}^2$



Sin embargo, Hay dominios que NO
CONSIDERAMOS:



CORTE
en
 $\mathbb{R}^2$



Definición: Sea $P(u, g) = 0$ UNA P.D.E.

Decimos que es de orden q si: q
es el orden maximal de las derivadas

Parciales, es decir, el máximo entero

dado por $P_1 + P_2 + \dots + P_d + P_t$.

Definición:

- 1) Si: $P(u, g) = 0$ depende linealmente de la incógnita u y de sus derivadas parciales, se dirá que es **LINEAL**.
- 2) En caso contrario, diremos que la P.D.E. es **NO LINEAL**.
- 3) Si: $P(u, g) = 0$ no contiene términos que sean independientes de la función incógnita u , la E.D.P. se dirá **HOMOGÉNEA**.

Ejemplos de E.D.P.s

I) Ecuación de Poisson

$$\Delta u = f,$$

II) Ecuación de Transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta u) = 0,$$

con $\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ donde $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$.

III) Ecuación del Calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

IV) Ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f,$$

con $c > 0$.

obs $\Delta u := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} = \operatorname{div}(\nabla u)$

donde $\nabla u = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial u / \partial x_d \end{pmatrix}$.

Ejemplos de Ecuaciones NO Lineales

I) Ecuación de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{quasi-lineal})$$

II) Ecuación de Navier-Stokes

$$-\nu \Delta u + \boxed{(u \cdot \nabla) u} + \nabla p = f$$

$$\begin{cases} u = \text{velocidad} \\ p = \text{presión} \\ \nu = \text{viscosidad} \end{cases}$$

↳ término no lineal.

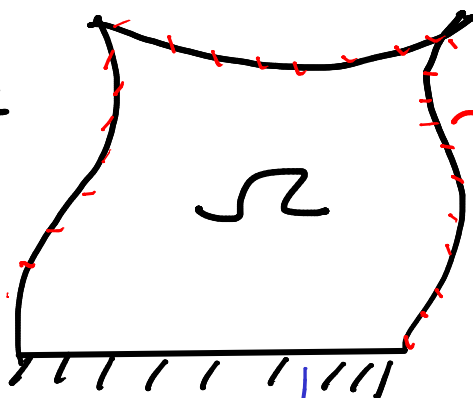
Condiciones de Borde

Hemos dicho que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio Acotado y Abierto con Frontera $\partial\Omega$. Pero, ¿qué condiciones se imponen en $\partial\Omega$?

A estas condiciones se les llaman Condiciones de Borde o de contorno.

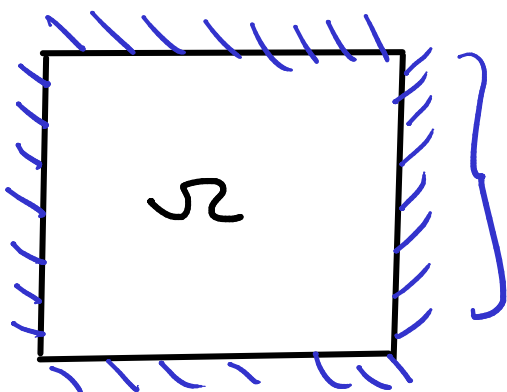
En inglés: Boundary conditions.

Ejemplo



→ PARED LIBRE de $\partial\Omega$

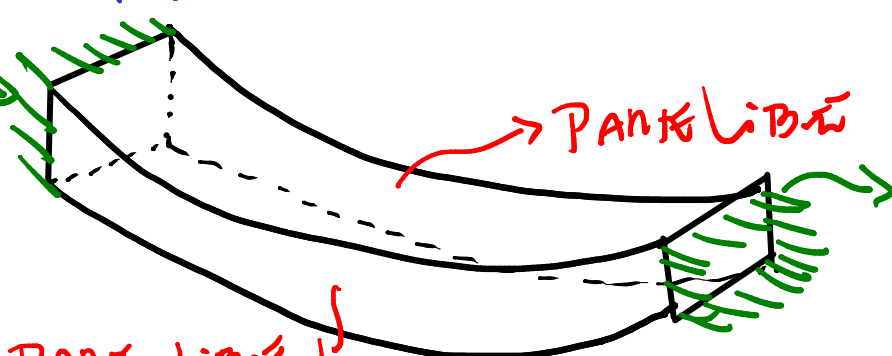
→ PARED FIJA de $\partial\Omega$



El WADNADLO ESTÁ EMPOTRADO !!

$\partial\Omega$ FIJA.

PARED FIJA



→ PARED LIBRE

→ PARED FIJA

PARED LIBRE

Tipos de condiciones de contorno

- (A) Condición de tipo DIRICHLET: DADA UNA EDP DEFINIDA SOBRE UN DOMINIO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ SUJETA A LA SIGUIENTE CONDICIÓN

$$u = g \quad \text{SOBRE } \partial\Omega$$

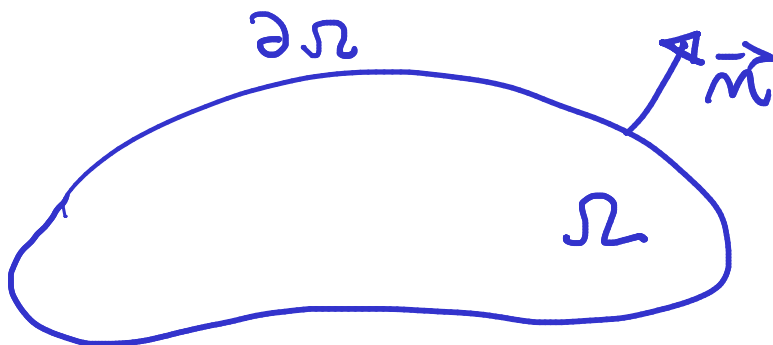
- (B) Condición de tipo NEUMANN: SI UNA E.D.P. ESTÁ DEFINIDA EN UN DOMINIO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ CON FRONTERA $\partial\Omega$, LA SIGUIENTE CONDICIÓN

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{SOBRE } \partial\Omega$$

CON h UNA FUNCIÓN CONOCIDA,

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n \quad (\text{DERIVADA NORMAL}),$$

Y n EL VECTOR UNITARIO NORMAL EXTERIOR A $\partial\Omega$



① Condición tipo Robin : DADA

UNA E.D.P. DEFINIDA SOBRE UN DOMINIO
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ SUJETA A LA SIGUIENTE
CONDICIÓN SOBRE LA FRONTERA $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = N \quad \text{SOBRE } \partial\Omega$$

donde N es una función conocida.

observación : otras condiciones relevantes

son las condiciones iniciales

Respecto de una de las variables
independientes que denotamos por t .

$$\text{Ej} \quad u(x, 0) = v_1(x) \quad \text{en } \overline{\Omega}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v_2(x) \quad \text{en } \overline{\Omega},$$

con v_1, v_2 funciones conocidas.

Ejemplo de E. D. P. con C-I.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u \quad \text{en } \Omega$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{SOBRE } \partial\Omega \times [0, T]$$

$$u(x, 0) = v(x) \quad \text{en } \overline{\Omega}.$$

Soluciones numéricas de EDPs

¿Por qué hacemos numérico?

En general, **no es posible obtener soluciones explícitas para las EDPs** (el mejor ejemplo es NAVIER-STOKES).

¿Cómo debemos proceder?

- 1) ASEGURAR que la E.D.P. tiene solución
- 2) ANALIZAR si la solución es ÚNICA
- 3) ANALIZAR su REGULARIDAD.

Si tenemos esta información, **CONSTRUIREMOS UN MÉTODO NUMÉRICO PARA APROXIMAR LA SOLUCIÓN de la E.D.P de interés.**

Eso es : si u es la solución de la E.D.P, **CONSTRUIREMOS u_n tal que**

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u.$$

EN OTRAS PALABRAS :

$$P(u, g) = 0 \quad \text{EDP EXACTA}$$

MÉTODO DE NÚMEROS

$$P_h^N(u_h^N, g_h^N) = 0 \quad \text{E.D.P. APROXIMADA}$$

donde $N \geq 1$, $N \in \mathbb{Z}$, denota la DIMENSIÓN DEL PROBLEMA APROXIMADO, g_h^N una APROXIMACIÓN DEL DATO g , y P_h^N una APROXIMACIÓN DEL PROBLEMA.

PARA HACER ESTAS APROXIMACIONES, USAREMOS EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Y EL OBJETIVO ES ESTUDIAR

$$\|u_h^N - u\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{h \rightarrow 0} 0$$

donde $\|\cdot\|$ es una NORMA DEFINIDA EN EL ESPACIO donde APROXIMAMOS LA SOLUCIÓN u .

LA PRINCIPAL MOTIVACIÓN
PARA NUESTRO TRABAJO ES
EL **ANÁLISIS FUNCIONAL**.

ELEMENTOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Funcional y Formas Bilineales

DEF: SEA $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ UN ESPACIO DE HILBERT.
LLAMAMOS **FUNCIONAL SOBRE V** A UNA
APLICACIÓN QUE ASOCIA UN NÚMERO REAL A
CADA ELEMENTO DE V

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

UN EJEMPLO ELEMENTAL DE FUNCIONAL
ES LA NORMA: SI $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ES UN
ESPACIO DE HILBERT TAL QUE

$$\|\cdot\|^{1/2} = \langle \cdot, \cdot \rangle, \text{ LA APLICACIÓN}$$

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto f(v) = \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

ES UN FUNCIONAL.

Def:
 1) Un funcional $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ se
 dice **lineal** si $\forall v, w \in V$ y
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$F(\alpha v + \beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w).$$

2) Un funcional $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ se
 dice **ALOTADO** si existe una
 constante $C > 0$ tal que
 $|F(v)| \leq C \|v\| \quad \forall v \in V.$

3) Se define **el dual de V** , que
 denotamos por **V'** al espacio
 vectorial de todos los funcionales
 lineales y alotados sobre V

$$V' := \{ F: V \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ es lineal y alotado} \}$$

A este espacio lo denotamos de la
 siguiente **NORMA**

$$\|F\|_{V'} = \sup_{v \in V} \frac{|F(v)|}{\|v\|}.$$

LEMA (Desigualdad de CAUCHY - SCHWARZ)
 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert.

Entonces

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

Un Resultado importante que se tiene en los espacios de Hilbert es el TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ (T. R. R.)

TEOREMA. SEA $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y SEA $F \in V'$. Entonces existe un único $u_F \in V$ tal que

$$F(v) = \langle u_F, v \rangle \quad \forall v \in V \quad y$$

$$\|F\|_{V'} = \|u_F\|_V.$$

obs: Este teorema establece que el cualquier espacio de Hilbert un elemento del espacio dual tiene un único representante en dicho Hilbert. Además, se establece un isomorfismo entre V y V' .

Def: SEA $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. CONSIDEREMOS LA APLICACIÓN $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

1) B es Bilineal si:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall w, v, z \in V \quad \begin{cases} B(\alpha v + \beta w, z) = \alpha B(v, z) + \beta B(w, z) \\ B(v, \beta w + \alpha z) = \beta B(v, w) + \alpha B(v, z). \end{cases}$$

- 2) B es ACOTADA si existe $M > 0$
tal que $|B(v, w)| \leq M \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V$
- 3) B es SIMÉTRICA si: $B(v, w) = B(w, v), \forall v, w \in V$
- 4) B es POSITIVA si: $B(v, v) > 0 \quad \forall v \in V$
- 5) B es COERCIVA SOBRE V (o V -elíptica)
si: $\exists \alpha > 0$ tal que
$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

DEFINICIÓN (DENSIDAD) SEAN $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle_V)$ y $(W, \langle \cdot | \cdot \rangle_W)$ dos espacios de Hilbert. Diremos que V está CONTENIDA EN W CON INYECCIÓN CONTINUA si: existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_W \leq C \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

Además, V es DENSO EN W si: CADA

elemento de W es límite de una sucesión de elementos de V (en $\|\cdot\|_W$).

Def: SEAN $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle_V)$ y $(W, \langle \cdot | \cdot \rangle_W)$ dos espacios de Hilbert. Toda aplicación $T: V \rightarrow W$ se llama OPERADOR.

obs $T: V \rightarrow W$ es lineal si:

$$a) T(\alpha u + \beta w) = \alpha T(u) + \beta T(w)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, w \in V$$

b) $T: V \rightarrow W$ es acotado si: $\exists C > 0$ tq $\|T(v)\|_W \leq C \|v\|_V$

obs: El espacio de todas las operaciones lineales y acotados entre V y W se denota por $\mathcal{L}(V, W)$.

El T.R.R. se puede generalizar a formas bilineales no simétricas. El

siguiente resultado trata justamente esto.

TEOREMA (LAX-MILGRAM) Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Sea $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y V -elíptica, es decir, $\exists \alpha > 0$ tq

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Entonces, para cada $F \in V'$, $\exists!$ $u \in V$ tq

$$\rightarrow B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

tiene única solución. Además

$$\|u\|_V \leq \alpha' \|F\|_{V'}.$$

OBSERVACIÓN: El TEOREMA DE LAX-MILGRAM es una herramienta fundamental en el análisis de E.D.P. y, además, en análisis numérico de E.D.P.

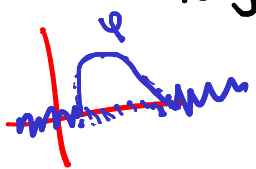
Para hacer uso de este TEOREMA, debemos considerar una FORMULACIÓN DÉBIL de la E.D.P.

DISTRIBUCIONES

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ UN ABIERTO ACOTADO.

EL ESPACIO $C^\infty(\Omega)$ DENOTARÁ EL ESPACIO DE FUNCIONES INFINITAMENTE DIFERENCIABLES EN Ω .

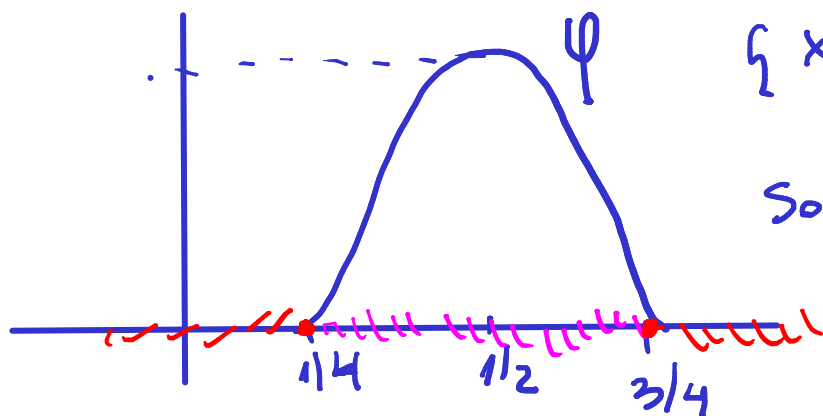
def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ABIERTO Y ACOTADO Y SEA ϕ UNA FUNCIÓN CONTINUA. SE DEFINE EL SOPORTE DE ϕ COMO EL CONJUNTO


$$\text{SOP } \phi := \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$$

Además podemos definir el espacio

$$C_0^\infty(\Omega) := \{ \phi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } \phi \text{ es compacto y } \text{sop } \phi \subseteq \Omega \}.$$

obs: El requerimiento de compactidad del soporte garantiza que las funciones de $C_0^\infty(\Omega)$ se anulan en alguna vecindad de la frontera de Ω .



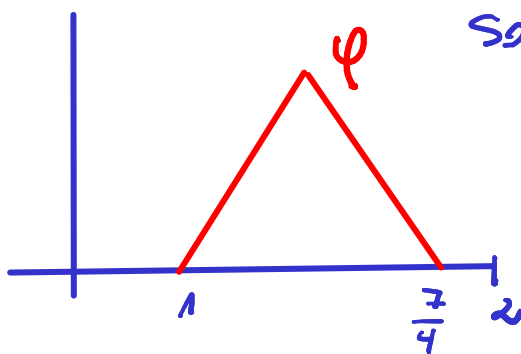
$$\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\} = \left] \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right[$$

$$\text{SOP } \phi = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \subseteq (0,1) = \Omega$$

obs De forma Análoga, Para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$C^m(\Omega) := \{ \varphi \in C^m(\Omega) : \text{sop } \varphi \text{ es compacto y } \text{sop } \varphi \subseteq \Omega \}$$

$\hookrightarrow \Omega = (0, 3)$



$\text{sop } \varphi = [1, \frac{7}{4}] \subseteq \Omega.$

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ las funciones $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ y de soporte compacto, con $\text{sop } \varphi \subseteq \Omega$. ($\mathcal{D}$ es el conjunto de funciones C^∞ de soporte compacto)

def Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Definimos

$$\partial^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

con $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ y $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$,
donde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall i$.

obs $\partial^\alpha (\partial^\beta \varphi) = \partial^{\alpha+\beta} \varphi$.

Consideremos la siguiente ecuación D.F.

$\varphi(x) / -u''(x) = f(x)$ en $\Omega = (0, 1)$

Sea $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{\Omega} u''(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \end{array} \right.$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 u''(x) \varphi(x) dx &= - \left(u'(x) \varphi(x) \Big|_0^1 - \int_{\Omega} u'(x) \varphi'(x) dx \right) \\ &= - \cancel{u'(1) \varphi(1)} + \cancel{u'(0) \varphi(0)} + \int_{\Omega} u'(x) \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} u'(x) \varphi'(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

¿Pero $u(x)$ dónde vive? ¿Qué espacio?

Introducamos el siguiente espacio

$$L^1(\Omega) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f| < \infty \right\}.$$

Este espacio lo llamamos espacio de funciones integrables.

obs 1) LAS FUNCIONES EN $L^1(\Omega)$ ESTÁN DEFINIDAS EN CASI TODOS PUNTOS (c.t.p.) O BIEN, SALVO EN CONJUNTOS DE MEDIDA NULA.

2) DEMOSTRO QUE $f = g$ c.t.p. CUANDO f Y g COINCIDEN SALVO EN CONJUNTOS DE MEDIDA NULA.

3) LO ANTERIOR IMPLICARÁ QUE FUNCIONES QUE COINCIDEN SALVO EN CONJUNTOS DE MEDIDA NULA, SERÁN LA MISMA FUNCIÓN.

Proposición SEA $f \in L^1(\Omega)$. ENTONCES

$$\int_{\Omega} f \phi = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \Leftrightarrow f = 0 \text{ c.t.p.}$$

Def DADA UNA SUCECIÓN $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$,
DIREMOS QUE LA SUCECIÓN CONVERGE A UNA FUNCIÓN $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, i.e., $\phi_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \phi$
EN $\mathcal{D}(\Omega)$ SI:

(i) $\exists K$ COMPACTO, $K \subset \Omega$ TAL QUE $\text{SOP}(\phi_k) \subseteq K, \forall k$.

(ii) $\forall \alpha, \partial^\alpha \phi_k \rightarrow \partial^\alpha \phi$ UNIFORMEMENTE EN K :
 $\rightarrow \max_{x \in K} |(\partial^\alpha \phi_k)(x) - (\partial^\alpha \phi)(x)| \rightarrow 0$

DEFINICIÓN ① Una aplicación lineal

$T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, se dirá continua si:

$$\rightarrow \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T, \phi_k \rangle = \langle T, \phi \rangle, \right.$$

donde $\langle T, \phi \rangle$ denota la acción de T sobre $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

En esta definición $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$

es una sucesión de funciones que convergen a $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

② Llamaremos Distribución sobre Ω a cualquier aplicación lineal y continua $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

③ El espacio de distribuciones sobre Ω está dado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

NOTACIÓN: La acción de una distribución T sobre una función test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ emplearemos la notación

$$\langle T, \phi \rangle := T(\phi).$$

ESPACIOS DE SOLUCIÓN

Los espacios de solución son los necesarios para analizar las soluciones de las E.D.P. En este curso, nos enfocaremos en espacios de solución muy particulares.

Partimos definiendo el siguiente espacio de funciones. **CUADRADO INTEGRABLE**

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio abierto y acotado.

$$L^2(\Omega) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f|^2 < \infty \right\}.$$

al espacio $L^2(\Omega)$ lo dotamos del siguiente producto escalar

$$(\cdot, \cdot)_{L^2} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(u, v) \mapsto (u, v)_{L^2(\Omega)}$

$$\text{con } (u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv.$$

Además :

$$\boxed{\|v\|_{L^2(\Omega)}} := \sqrt{(v, v)_{L^2(\Omega)}}.$$

Con este espacio de funciones cuadrado integrables, introducimos el siguiente espacio de solución.

$$\{ W(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i=1, \dots, d \right\} \}$$

EN ESTE ESPACIO, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ LO DENOTAMOS

ENTONCES COMO UNA DISTRIBUCIÓN, ES DECIR,

NO COMO LA DERIVADA EN EL SENTIDO

CLÁSICO. ADemás se tiene que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 < +\infty$$

obs: recordamos que:

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \phi \quad \forall \phi \in D(\Omega)$$

implicando que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i, \forall i.$

obs: El espacio $W^{1,2}(\Omega)$ lo denotamos usualmente como $H^1(\Omega).$

$$W^{1,2}(\Omega) := H^1(\Omega).$$

→ Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$

$$H^1(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \underline{\nabla} v \in L^2(\Omega) \right\}$$

→ Si $\Omega \subseteq \mathbb{R};$

$$H^1(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \underline{v}' \in L^2(\Omega) \right\}.$$

El espacio $H^1(\Omega)$ lo dotamos del siguiente producto escalar: si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto (u, v)_{H^1(\Omega)} := \underbrace{\int_{\Omega} uv}_{\sim} + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v}_{\sim}$$

obs si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} u' v'.$$

Con este producto interno podemos definir la norma de $H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

y también la semi-norma de $H^1(\Omega)$

$$|u|_{H^1(\Omega)}^2 := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Una propiedad importante del espacio $H^1(\Omega)$ es que es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$.

El siguiente subespacio de $H^1(\Omega)$ es de GRAN importancia:

$$\boxed{H_0^1(\Omega)} := \{v \in H^1(\Omega) : \exists \{\phi_k\} \subseteq D(\eta) \text{ t.q. } \|\phi_k - v\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0\}.$$

Es decir, son las funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan en la frontera de Ω .

En este espacio $H_0^1(\Omega)$ se satisface la siguiente desigualdad. (MUY IMPORTANTE)

TEOREMA (Desigualdad de POINCARÉ-FRIEDRICHS)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto acotado.

Entonces $\exists C_\Omega > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

EJEMPLO (OPRATIVO) si $\Omega =]a, b[$, demuestre la desigualdad de POINCARÉ y verifique

$$\text{que } C_\Omega := \left(\frac{2}{2 + (b-a)^2} \right)^{1/2}.$$

HINT: tome $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ y para $x \in]a, b[$

$$|\varphi(x)| = \left| \int_0^x \varphi'(x) \cdot dx \right|,$$

y aplique CAUCHY-SCHWARZ. Al final, integre sobre $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

flope@ubibio.cl

APLICACIÓN DE LO ANTES VISTO

Sea $\Omega := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

NOS INTERESARÁ EL SIGUIENTE PROBLEMA:

Hallar $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{en } \Omega := (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Sol: Sea $H_0^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : v' \in L^2(\Omega)\}$

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, multiplicamos
la EDO por v e integramos
sobre Ω

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad - \int_{\Omega} u''(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u'' v &= -u' v \Big|_a^b + \int_{\Omega} u' v' \\ &= -\cancel{u'(a) v(b)} + \cancel{u'(b) v(a)} + \int_{\Omega} u' v' \end{aligned}$$

$$-\int_{\Omega} u'' v = \int_{\Omega} u' v' \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

el problema de Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$
tal que $\forall f \in L^2(\Omega)$ se satisfaga

$$\int_{\Omega} u' v' = \int_{\Omega} f v' \quad \forall v \in \underline{H_0^1(\Omega)}$$

Definamos $B: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

tal que

$$B(u, v) = \int_{\Omega} u' v'$$

y Definamos $F: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{tal que } F(v) = \int_{\Omega} f v$$

Así, el problema variacional es:

Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que
 $B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Pero aplan lax-milgram

1) B es B-lineal ✓✓

2) B es Acotada ✓✓

3) B es eliptica ✓✓

4) $F \in H_0^1(\Omega)'$ ✓✓

1) Sea $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} B(\alpha u + \beta v, w) &= \int_{\Omega} (\alpha u + \beta v)' w' \\ &= \int_{\Omega} (\alpha u' + \beta v') w' \\ &= \int_{\Omega} (\alpha u' w' + \beta v' w') \\ &= \int_{\Omega} \alpha u' w' + \int_{\Omega} \beta v' w' \\ &= \alpha \int_{\Omega} u' w' + \beta \int_{\Omega} v' w' \end{aligned}$$

$$= \alpha B(u, w) + \beta B(v, w), \checkmark$$

Exercise $B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w).$

2) B And max $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$|B(u, v)| = \left| \int_{\Omega} u' \cdot v' \right| \quad (B(u, u)) \leq M \|u\|_V \|u\|_V$$

$$(\text{Cauchy-Schwarz}) \leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \left(\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \times \left(\|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$$= 1 \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

M=1 $\therefore |B(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$
 $\omega, M=1.$

3) $B(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2$

In Effect: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\exists$ $\alpha > 0$

$$B(v, v) = \int_{\Omega} v' \cdot v' = \int_{\Omega} |v'|^2 = \|v'\|_{L^2}^2$$

$$(\text{POINCARÉ}) \quad \geq C_{\Omega} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Así, $B(\cdot, \cdot)$ es bilineal con
CONSTANTE $\alpha = C_{\Omega}$

$$4) \quad F(v) = \int_{\Omega} f v$$

$$i) \quad F(\alpha u + v) = \alpha F(u) + F(v)$$

es fácil, sea $u, v \in H_0^1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$1) \quad F(\alpha u + v) = \int_{\Omega} f(\alpha u + v)$$

$$= \int_{\Omega} (\alpha f u + f v)$$

$$= \alpha \int_{\Omega} f u + \int_{\Omega} f v = \alpha F(u) + F(v)$$

$$2) \quad |F(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}^{+ \|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}} \\ \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\text{Así} \quad |F(v)| \leq M \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ \text{con} \quad M = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Así, usando Lax-Milgram tenemos
que $\exists! u \in H^1(\Omega)$ solución de
 $B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

Existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$
