UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre 2022

Listado 2 de Análisis y Métodos Numéricos (390169-392202).

(1) Considere el siguiente sistema lineal que está mal condicionado

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix},$$

con solución $\left(1,1,1,1\right)^{\mathtt{t}}$. Considere el sistema perturbado, donde el lado derecho ha sido levemente modificado

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1+\delta u_1 \\ u_2+\delta u_2 \\ u_3+\delta u_3 \\ u_4+\delta u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 25 \\ 16 \end{pmatrix},$$

con solución $\begin{pmatrix} 832 \\ 1324 \\ -2047 \\ 2021 \end{pmatrix}$. La matriz $A$ del sistema lineal es invertible, con $\det(A) = 1$ y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 105 & 167 & -304 & 255 \\ 167 & 266 & -484 & 406 \\ -304 & -484 & 881 & -739 \\ 255 & 406 & -739 & 620 \end{pmatrix}.$$

Realice el análisis numérico de este ejemplo, sabiendo que el valor propio más pequeño y el más grande de la matriz son respectivamente

$$\lambda_1 \approx 0.0005343 \quad y \quad \lambda_4 \approx 19.1225.$$

(2) Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de matrices de orden 2, cuyos elementos $a_{ij}$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_{ij} \leq 100$. Demuestre que

$$\mathrm{cond}_2(A) = \inf_{E\in\mathcal{E}} \mathrm{cond}_2(A),$$

donde

$$\begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}.$$

Para hacer esto, el primer paso es establecer que, para una matriz cualquiera $A = (a_{ij})$ de orden 2,

$$\mathrm{cond}(A) = \sigma + \{\sigma^2 - 1\}^{1/2} \quad con \quad \sigma = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}|^2}{2|\det(A)|}.$$

Y como una aplicación, resuelva los sistemas

$$Au = b \quad y \quad A(u + \delta u) = b + \delta b,$$

con

$$b = \begin{pmatrix} 199 \\ 197 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \delta b = \begin{pmatrix} -0.0097 \\ 0.0106 \end{pmatrix}.$$

(3) Sobre el conjunto $\mathfrak{J}$ de las matrices invertibles, se define la función

$$d : (A,B) \in \mathfrak{J} \times \mathfrak{J} \to d(A,B) = 1 - \frac{1}{\operatorname{cond}(A^{-1}B)},$$

el número de condición es relativo a una norma matricial general subordinada. Muestre que esta función es "casi" una métrica, en el sentido de que satisface

(a) $0 \leq d(A,B) < 1$,
(b) $d(A,B) = d(B,A)$,
(c) $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

(4) (*La condición del problema de inmersión de una matriz*). Sea $A$ una matriz dada e invertible.

(a) Si $A + \delta A$ es una matriz invertible, muestre la siguiente desigualdad

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

(b) Muestre la desigualdad

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1 + \mathcal{O}(\|A\|)).$$

(5) La matriz de Hilbert la definimos como $H := (h_{ij})$, donde

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Demuestre que esta matriz es definida positiva y concluya su condicionamiento para $n = 2,3,4$.

(6) Sea $A \in \mathbb{R}^n$ una matriz diagonalizable y $P$ una matriz tal que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, con $\lambda_i \in \operatorname{sp}(A)$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$. Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial tal que $\|\operatorname{diag}(d_i)\| = \max_{1\leq i\leq n}|d_i|$. Definimos

$$D_i := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \lambda_i| \leq \operatorname{cond}(P)\|\delta A\|\}.$$

Si existe un entero $m$ que satisface $1 \leq m \leq n$ tal que la unión $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} D_i$ de los $m$ discos $D_i$ es disjunta de la unión $\displaystyle\bigcup_{i=m+1}^{n} D_i$ de los restantes $n-m$ discos, entonces la unión $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} D_i$ contiene exactamente $m$ valores propios de la matriz $A + \delta A$.

(7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica que admite una factorización $LU$. Muestre que es posible expresar $A$ como $A = B\widetilde{B}^{\mathrm{t}}$, donde $B$ es triangular inferior y $\widetilde{B}$ es una matriz donde cada columna es, ya sea la correspondiente columna de $B$, o bien la correspondiente columna de $B$ con el signo contrario. Aplique este resultado a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(8) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y sea $B := A + \delta A$, también simétrica. Sean $\operatorname{sp}(A)$ y $\operatorname{sp}(B)$ tales que

$$\operatorname{sp}(A) = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} \quad \text{y} \quad \operatorname{sp}(B) = \{\beta_1,\dots,\beta_n\},$$

y que satisfacen $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ y $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$. Sea $\alpha_k$ un valor propio simple de $A$ y sea $\mathbf{a}_k$ un vector propio asociado a $\alpha_k$. Asuma que $\|\mathbf{a}_k\|_2 = 1$. Demuestre que si

$$\|\delta A\|_2 < \Delta := \min_{i\neq k}|\alpha_i - \alpha_k|,$$

entonces existe un autovector $\mathbf{b}_k$, con $\|\mathbf{b}_k\|_2 = 1$, asociado al valor propio $\beta_k$, tal que

$$\|\mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k\|_2 \leq \gamma(1+\gamma^2)^{1/2},$$

donde $\gamma := \dfrac{\|\delta A\|_2}{\Delta - \|\delta A\|_2}$.