Listado 1 de Análisis y Métodos Numéricos (390169).

(1) **(Yuliza)** Muestre que si $A = (a_{ij})$ es diagonal dominante, es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n,$$

entonces A es invertible.

(2) **(Víctor)**Demostrar que

$$\lim_{p \to \infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty.$$

(3) **(Nelson)** Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que la función $\boldsymbol{v} \mapsto \sqrt{(\boldsymbol{v}^* A \boldsymbol{v})}$ sea una norma.

(4) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices hermitianas. Mostrar que ellas poseen una misma base de vectores propios si y sólo si $AB = BA$.

(5) **(Danilo)** Sea A una matriz cuadrada y sea $\|\cdot\|$ alguna norma matricial inducida. Entonces

$$\lim_{m \to \infty} \|A^m\|^{1/m} = \rho(A).$$

(6) **(Eider)** Sea $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $1 \leq i \leq n$. Mostrar que estas funciones son linealmente independientes si y sólo si la matriz $A = (a_{ij})$, con

$$a_{ij} = \int_0^1 f_i(x) f_j(x)\, dx, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

es definida positiva.

(7) **(Víctor)** Sea A una matriz cuadrada. Demuestre que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ es convergente si y sólo si $\rho(A) < 1$. Además $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$ y se satisface, para $\|A\| < 1$ que

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

(8) **(Horacio)** Sea A una matriz cuadrada tal que $a_{ii} \geq 0$ y $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$. Considere los siguientes enunciados:

(I) La matriz A es invertible y los elementos de A^{-1} son todos no negativos.

(II) Existe una matriz diagonal D, tal que $d_{ii} > 0$ y cierto número $\alpha > 0$ tal que

$$\langle \boldsymbol{v}, DA\boldsymbol{v} \rangle \geq \alpha \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Demuestre que (I) y (II) son equivalentes.

(9) **(Eider)** Sean A y B dos matrices cuadradas tales que $0 \neq \mathrm{sp}(A)$ y $AB = I + E$. Suponga que la norma de E es sufiicientemente pequeña. Obtenga una cota superior para $\|A^{-1} - B\|$ en términos de $\|B\|$ y $\|E\|$.

(10) **(Danilo)** Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Diremos que A tiene rango completo si tiene el mayor rango posible (el menor entre m y n), es decir, una matriz de rango completo donde $m \geq n$ debe tener n columnas linealmente independientes. Demuestre que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es de rango completo si y sólo si A no asigna dos vectores distintos al mismo tiempo.

(11) **(Carola)** Sea $A \in \mathbb{C}^n$. Verifique

$$\mathrm{sp}\,(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}.$$

(12) **(Horacio)** Sea $\boldsymbol{v}$ cualquier vector y sea A una matriz simétrica tal que $0 \notin \mathrm{sp}\,(A)$. Demuestre que

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{t}} A^{-1} v = \frac{\det(A + \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{t}})}{\det(A)} - 1.$$

(13) **(Yuliza)** Demuestre que los vectores de un conjunto ortogonal S son linealmente independientes.

(14) **(Felipe)** Demuestre que cualquier norma vectorial es una función continua.

(15) **(Nelson)** Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, demuestre la desigualdad de Hölder

$$|\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q.$$

(16) **(Felipe)** Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz invertible, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{x}$ no nulo. Por otro lado, sean $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\widetilde{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$ donde $\|\widetilde{A}\| \|\widetilde{A} - A\| < 1$. Entonces, la única solución de $\widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$ satisface

$$\frac{\|\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(A) \left(\frac{\|\widetilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} + \frac{\|\widetilde{A} - A\|}{\|A\|} \right) \left(\frac{1}{1 - \operatorname{cond}(A) \dfrac{\|\widetilde{A} - A\|}{\|A\|}} \right).$$

(17) **(Carola)** Sea A una matriz de orden 100 dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\operatorname{cond}_2(A) \geq 2^{99}$.