

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Sea el problema: Hallar $u \in V$ tal que

$$(1) \quad B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Sea $\{V_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de Dimensión finita tales que

$$V_h \subseteq V \quad \forall h$$

El problema (1) tiene el siguiente esquema de Galerkin asociado:

Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$(2) \quad B(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \subset V$$

Como $V_h \subseteq V$ y la existencia y unicidad de solución es en todo el espacio V , en particular en V_h también hay existencia y unicidad de $u_h \in V_h$ que resuelve (2), como consecuencia

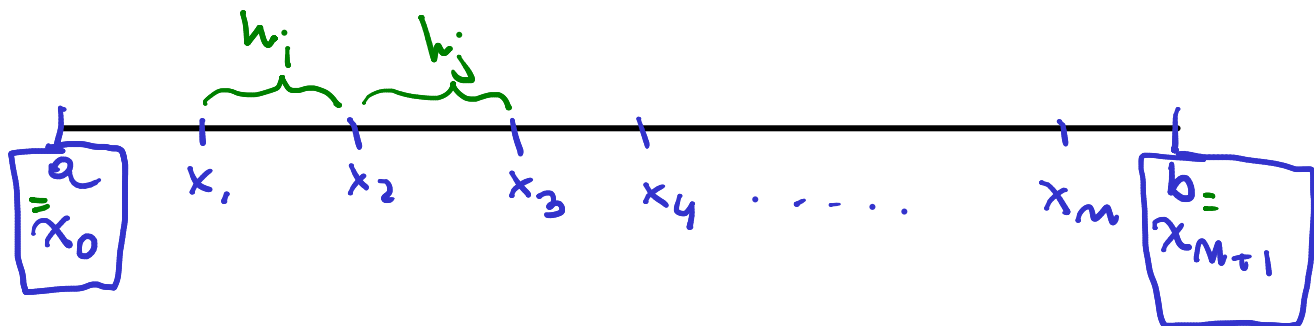
de Lax-Milgram.

obs: Si V_h es un subespacio generado por funciones polinomiales a trozos, se obtiene el método de elementos finitos.

Veamos el siguiente caso particular de elementos finitos:

M.E.T. Tipo IP_1

En $\mathbb{R}$. Sea $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$
 Particionamos Ω como sigue



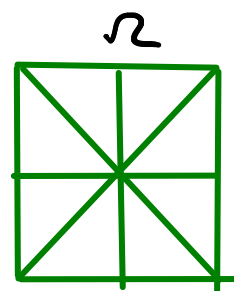
de otro modo

$$\rightarrow x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = b$$

Definamos:

$$I_j := [x_{j-1}, x_j]$$

$$h_j := x_j - x_{j-1}$$



$$\forall j = 1, \dots, m+1 \quad \text{y} \quad \text{Adem\u00e1s}$$

$$\Rightarrow h := \max_{1 \leq j \leq m+1} h_j$$

obs: La partici\u00f3n, en general, es no uniforme

$$\text{i.e. } h_j \neq h_i \quad \forall i, j. \quad \text{Sin embargo,}$$

Para efectos pr\u00e1cticos, se puede uniformizar.
 $h_j = h_i$

Un espacio para discretizar $H_0^1(\Omega)$

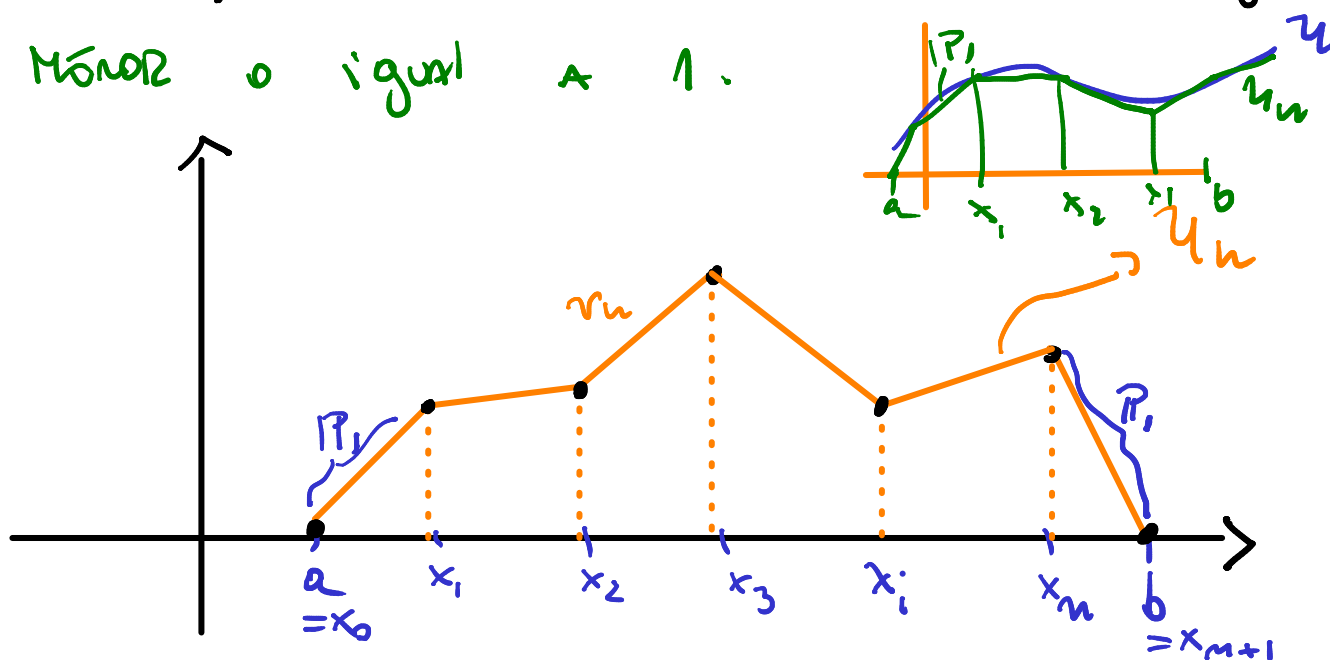
$$\text{Sea } V := H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad \text{Sea } \Omega = (a, b)$$

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

DEFINICIONES: $\rightarrow B(v, r) = F(v)$ $\rightarrow B(u_n, r_n) = F(v_n)$

$$\underline{V_n} := \left\{ \underline{v_n} \in C(\bar{\Omega}) : v_n|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \underline{P_1}([x_{j-1}, x_j]) ; \forall j=1, \dots, m+1, \right. \\ \left. v_n(a) = v_n(b) = 0 \right\}.$$

con $\underline{P_1}$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a 1.

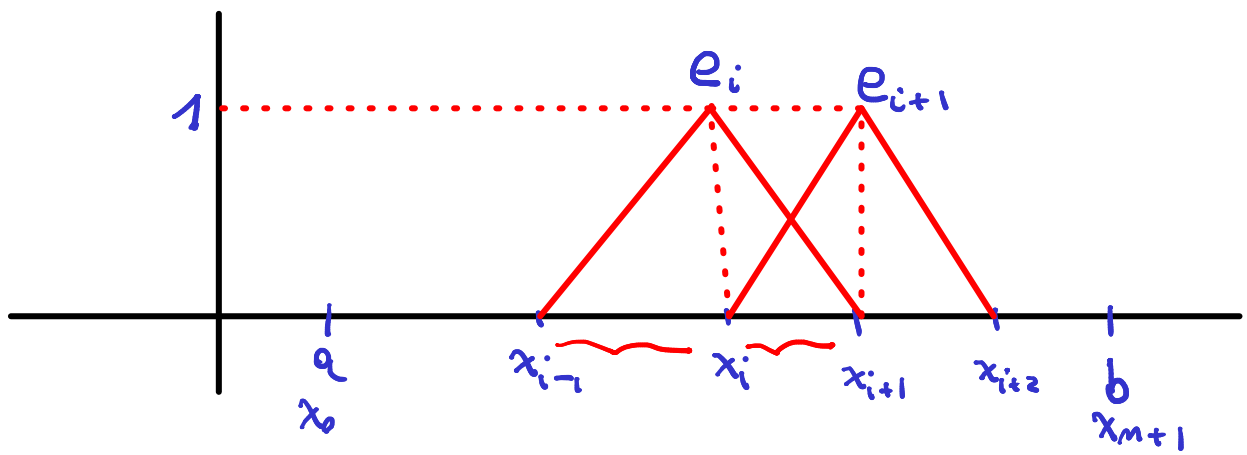


- obs:
- 1) $V_n \subseteq V$ (método de Galerkin)
 - 2) Si $u \in V$, se sabe que u queda completamente determinada por los valores que toma en x_i , $\forall i=1, \dots, m+1$.
 - 3) los puntos x_i los llamamos **NODOS**.

DEFINAMOS UN TIPO ESPECIAL DE FUNCIONES

Sea $e_i \in V_n$ tal que

$$e_i(x_j) = \begin{cases} 1 & , i=j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$



Las funciones e_i se le llaman **FUNCIONES TECHO**,
las que definimos como

$$e_i(x) := \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

obs: • $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ FORMAN UNA BASE DE V_n

• si $v_n \in V_n$, entonces

$$v_n = \sum_{i=1}^m d_i e_i(x), \quad d_i = v_n(e_i), i=1, \dots, m$$

¿QUÉ HANAMOS AHORA?

PROBLEMA CONTINUO: Hallan $u \in V$ tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

PROBLEMA DISCRETO: Hallan $u_n \in V_n$ tal que

$$B(u_n, v_n) = F(v_n), \quad \forall v_n \in V_n$$

Lema: Los siguientes problemas
son equivalentes:

$$1) B(u_n, v_n) = F(v_n) \quad \forall v_n \in V_n$$

$\Leftrightarrow$

$$2) B(u_n, e_j) = F(e_j) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Empuemos: Si $u_n \in V_n$ es solución
de $B(u_n, v_n) = F(v_n) \quad \forall v_n \in V_n$

Se tiene

$$u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x), \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$B(u_n, e_j) = B\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j\right)$$

$$= B(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i B(e_i, e_j)$$

Así, el problema discreto

$$B(u_n, e_j) = F(e_j)$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{\star} \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i B(e_i, e_j) = F(e_j) \right. \\ \left. \forall j \in \{1, \dots, m\} \right.$$

Definimos $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ $(B(e_i, e_j))$

$$F = (f_j)_{j=1}^m \quad (F(e_j))$$

$$\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^m \quad (\lambda_i)$$

$$s_i(b_{ij}) = B(e_i, e_j) \rightarrow f_j = F(e_j)$$

$$\Rightarrow \textcircled{\star} \text{ se reduce a resolver}$$

$$B \lambda = F$$

$$\boxed{\lambda = B^{-1} \cdot F} \Rightarrow \boxed{\mu_n}$$

obs: la matriz B se le llama
matriz de rigidez y el vector
 F se le llama vector de cargas.

LEMA: LA MATRIZ B ES

SIMÉTRICA Y DEFINIDA POSITIVA.

demo: notamos que $j = 1, \dots, n$

$$\boxed{b_{ij}} = B(e_i, e_j). \text{ Como } B(u, v) = \int_{\Omega} u' v'$$

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } B(e_i, e_j) &= \int_{\Omega} e_i' e_j' \\ &= \int_{\Omega} e_j' \cdot e_i' = B(e_j, e_i) \\ &= \boxed{b_{ji}} \end{aligned}$$

$\therefore (b_{ij})$ ES SIMÉTRICA.

demostramos que B ES DEFINIDA POSITIVA

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq \vec{0}$ y sea

$$v_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i(x) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\alpha^t B \alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_i \alpha_j \quad \left(\begin{array}{l} \text{DEF. DE} \\ \text{MULTIPLICACIÓN} \end{array} \right)$$

$$\text{Def. de } (b_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B(e_i, e_j) \alpha_i \alpha_j$$

Linealidad de $B = B\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\right)$
 En cada componente

$$\text{Def. de } v_n = B(v_n, v_n)$$

$$\text{Elipticidad} \geq \beta_{>0} \|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2 > 0$$

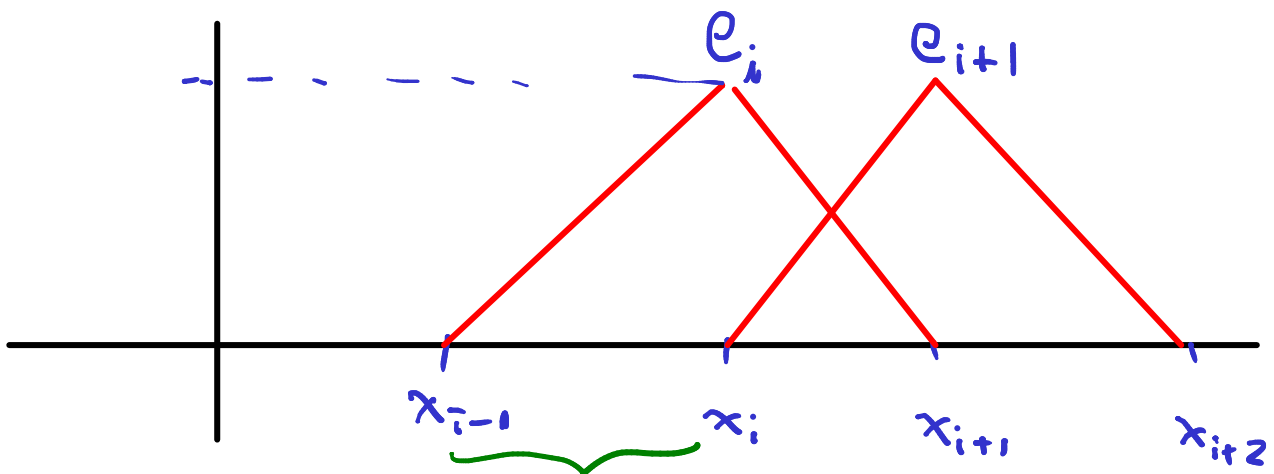
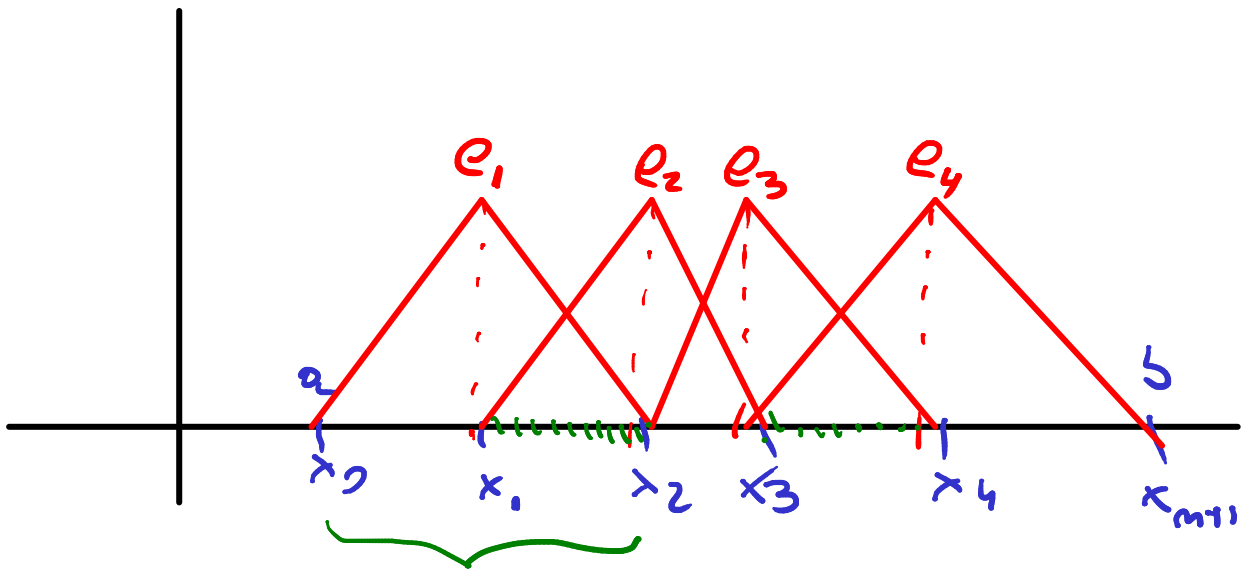
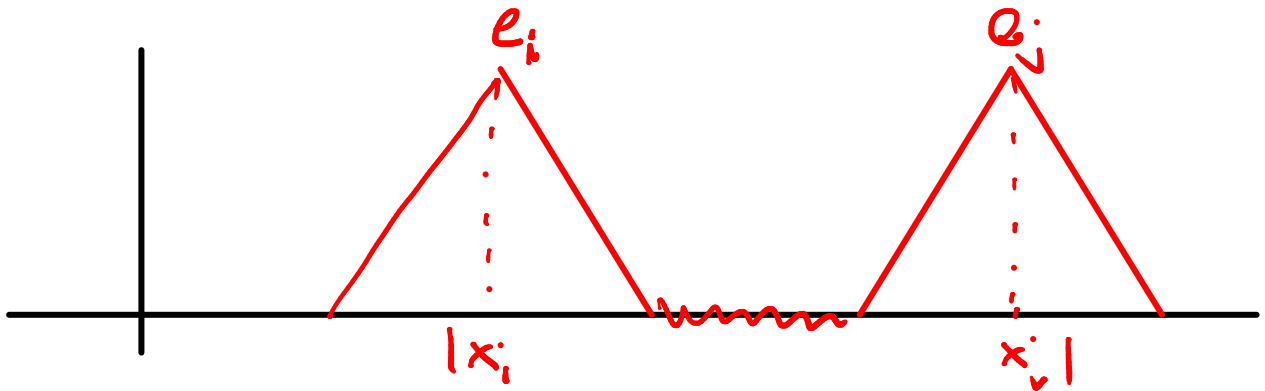
$$\text{Así } \alpha^t B \alpha > 0.$$

$\therefore B$ es simétrica y definida positiva. $\square$

$$\text{Si } \begin{cases} u'' = f, & \text{en } (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases},$$

¿Qué forma tiene B ?

$$\mathbb{B} \quad b_{ij} = \int_{\Omega} e_i(\omega) e_j(\omega) d\omega = 0 \quad |i-j| \geq 2$$



$$b_{ii} = \int_{\Omega} e_i(\omega) e_i(\omega) d\omega = \int_{\Omega} [e_i(\omega)]^2 d\omega$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [e_i'(\omega)]^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [e_i'(\omega)]^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [e_i'(\omega)]^2 dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)' \right]^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \right)' \right]^2 dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} dx$$

$$= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx + \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx$$

$$= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} (\cancel{x_i - x_{i-1}}) + \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} (\cancel{x_{i+1} - x_i})$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{h_i}} + \frac{1}{\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{h_{i+1}}} = \boxed{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}}$$

$$b_{i,i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e_i' e_{i+1}' dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} e_i'(\omega) e_{i+1}'(\omega) d\omega = -\frac{1}{h_{i+1}}$$

$$b_{i-1,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} e_{i-1}, \quad e_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} e_i e_{i-1} = -\frac{1}{h_i}$$

Supongamos que la partición de (a,b) es uniforme:

$$h = \frac{b-a}{n+1}$$

$$b_{ii} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}$$

$$b_{i,i+1} = -\frac{1}{h}$$

$$b_{i-1,i} = -\frac{1}{h}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \theta \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{n-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{nn} \\ \theta & \vdots & \vdots & b_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/h & -1/h & \cdots & \theta \\ -1/h & 2/h & \cdots & -1/h \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta & \vdots & \vdots & 2/h \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \theta \\ -1 & 2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta & \vdots & \vdots & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \theta \\ -1 & 2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta & \vdots & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$T(e_j) = f_j = \int_a^b f e_j(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f e_j$$

ESTIMACIÓN DEL ERROR

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

$$(1) \rightarrow B(u_h, v_h) = \underline{F(v_h)} \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\underline{V_h \subseteq V.} \quad \text{EVALUAMOS}$$

$$(2) \rightarrow B(u, v_h) = \underline{F(v_h)} \quad \forall v_h \in V_h$$

Restando (2) - (1) se tiene

$$\boxed{B(u - u_h, v_h) = 0} \quad \forall v_h \in V_h$$

La relación es conocida como
ORTOGONALIDAD DEL ERROR $u - u_h$.

LEMA DE CÉA (MÉTODO DE APROXIMACIÓN)

SEA B UNA FORMA BILINEAL,
ACOTADA Y V -ELÍPTICA.

$$\text{Si: } B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

TÉNE ÚNICA SOLUCIÓN $\hookrightarrow$

$$B(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

TAMBIÉN,

Exercícios

$$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_{H^1(\Omega)}$$

Teoria de interpolação.

$$\dots \quad \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^\alpha \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{cases} -u'' + \boxed{u} = f & \text{em } \Omega = (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$