Física II, Ondas

Ondas transversales en una cuerda

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Ondas en Medios Elásticos

Introducción, Ondas Mecánicas, Tipos de Ondas, Ondas viajeras, La ecuación de Onda, El Principio de Superposición, ***Ondas en Cuerdas, Ondas Estacionarias****, Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio, Ondas Sonoras, El Efecto Doppler.*

Ondas transversales en una cuerda

Ecuación de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$

Soluciones a esta ecuación

$u(x,t) = f(x - vt)$ Si el pulso viaja a la derecha

$u(x,t) = f(x + vt)$ Si el pulso viaja a la izquierda

Como la ecuación es lineal podemos probar, por ejemplo, que:

$$T(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

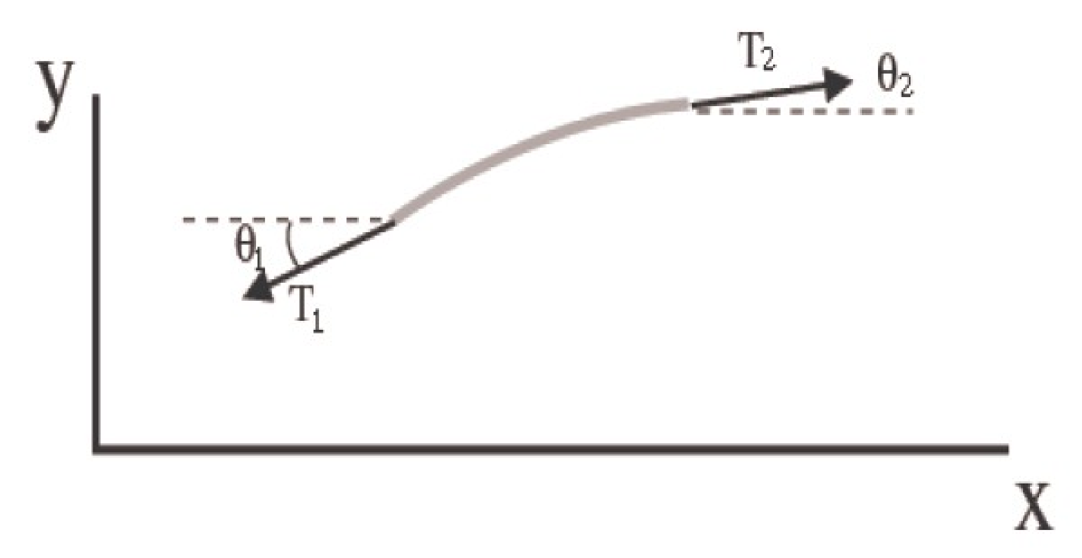
Ahora veremos que un perturbación a una cuerda horizontal tensa satisface la ecuación de ondas.

Consideremos una cuerda que se deforma ligeramente en la dirección transversal:

pero que su deformación (o movimiento) es tal que la tensión T a lo largo de la cuerda se mantiene constante.

La ecuación que obedece un elemento de cuerda está dada por la fuerza neta sobre este elemento:

$$\begin{aligned} \Delta m\, a_x &= \sum F_x = T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 \\ \Delta m\, a_y &= \sum F_y = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 \end{aligned}$$



sin embargo si la deformación es chica (angulo pequeño) se tiene: $\cos\theta_1 \approx 1$ y $\sin\theta_1 \approx \theta_1 \approx \tan\theta_1$. Lo mismo ocurre con θ_2. Reemplazando en la ecuación de fuerza queda:

$$\begin{aligned} \Delta m\, a_x &\approx T_2 - T_1 \\ \Delta m\, a_y &\approx T_2 \tan\theta_2 - T_1 \tan\theta_1 \end{aligned}$$

Si sólo se admite movimientos transversales ($a_x = 0$) resulta $T_2 = T_1$, es decir la tensión es constante a lo largo de la cuerda, digamos que el valor es T_0.

La ecuación de movimiento para la componente y entrega:

$$\begin{aligned} \Delta m\, a_y &\approx T_0\,(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) \\ &\approx T_0\,(y'(x+\Delta x) - y'(x)) \end{aligned}$$

en que hemos usado que $\tan\theta_1 = dy/dx\|_x = y'(x)$ y $\tan\theta_2 = dy/dx\|_{x+\Delta x} = y'(x+\Delta x)$

Ver pizarra

$$\begin{aligned} \Delta m\, a_y &\approx T_0\,(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) \\ &\approx T_0\,(y'(x+\Delta x) - y'(x)) \end{aligned}$$

Dividiendo por la longitud del elemento horizontal Δx queda:

$$\underbrace{\frac{\Delta m}{\Delta x}}_{\mu}\ \underbrace{a_y}_{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \approx \ = \ T_0\, \underbrace{\frac{y'(x+\Delta x) - y'(x)}{\Delta x}}_{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

En el límite $\Delta x \to 0$ se obtiene una ecuación de onda para los movimientos transversales de una cuerda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

con rapidez de onda $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

Luego las perturbaciones a una cuerda horizontal tensa satisfacen la ecuación de onda en una dimensión. Estas perturbaciones (pulsos) se propagan con una velocidad constante dada por C (velocidad de fase).

Soluciones particulares a la ecuación de onda en una cuerda tensa

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

con rapidez de onda $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

y(x,t) = ¿?

Condiciones de borde (frontera)

- Cuerda infinita
- Cuerda finita con dos extremos fijos
- Cuerda finita con un extremo fijo

- Soluciones caso cuerda infinita

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Solución general a esta ecuación:

y(x,t) = f(x –vt) + g(x + vt)

Pulso que viaja a la derecha

Pulso que viaja a la izquierda

Ej. Pulso que viaja a la derecha

Otras posibles soluciones a la ecuación de onda en una cuerda tensa infinita son los trenes de onda discutidos en la clase anterior

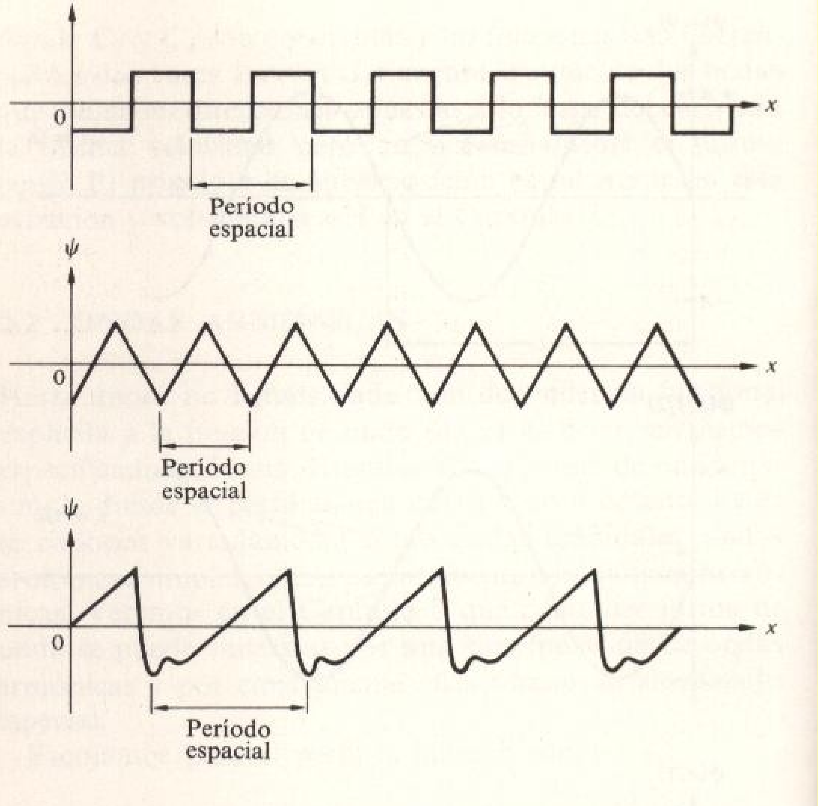


Fig. 2.6 Ondas periódicas anarmónicas.

Un caso particular de tren de ondas son las ondas armónicas

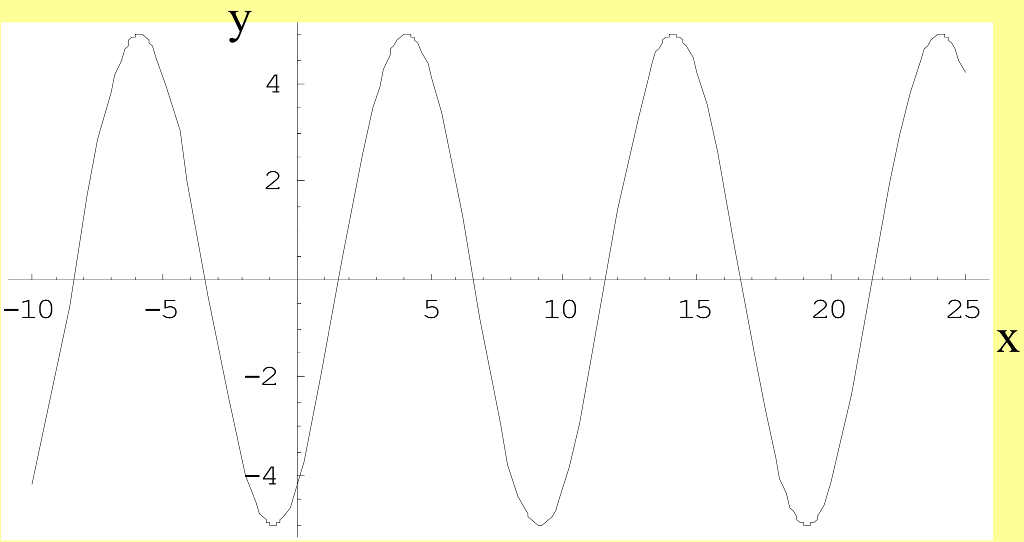
Ej. Onda armónica viajera que se mueve hacia la derecha

$$y(x,t) = y_m \, Sen[kx - \omega t + \delta]$$

Número de onda $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Frecuencia angular $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Donde δ es una constante (ángulo de fase o fase inicial)



¿Qué otro tipo de soluciones podemos tener?

Combinaciones lineales de estas soluciones

Recordemos que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

La ecuación de onda es lineal luego si las funciones f(x – vt) y g(x + vt) son soluciones de la ecuación de onda tenemos que T(x,t) también será una solución de esta ecuación

$$T(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Clase anterior:

El principio de superposición

Es un hecho experimental que para muchas clases de ondas dos o más ondas puedan atravezar el mismo espacio independientemente unas de otras.

El hecho de que las ondas actúen independientemente una de la otra, significa que el movimiento de cualquier partícula en un momento dado es simplemente la suma de los movimientos que le darían las ondas individuales solas.
Este proceso de suma se denomina superposición.

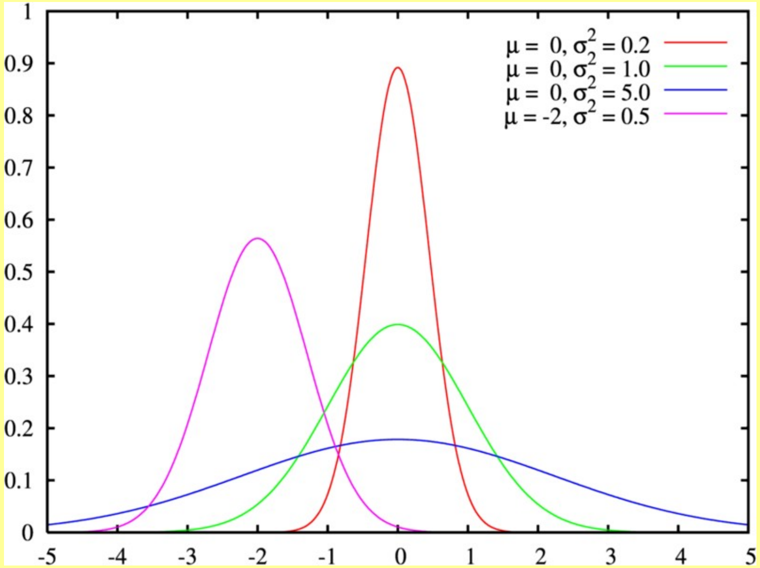
Interferencia de ondas

Interferencia es un término técnico que se refiere a los efectos físicos de la superposición de dos o más trenes de ondas.
A continuación consideraremos algunos casos particulares (pero de interés) de interferencia de dos pulsos y de dos trenes de ondas en una cuerda tensa infinita.

0) Interferencia de dos pulsos con forma "Gaussiana" de amplitudes diferentes

Función Gaussiana:

$$f(x) = a e^{-(x-b)^2/2c^2}$$



Consideramos los pulsos "Gaussianos"

Pulso que viaja a la derecha

$$y_1(x,t) = Ae^{-(x-vt+\delta)^2}$$

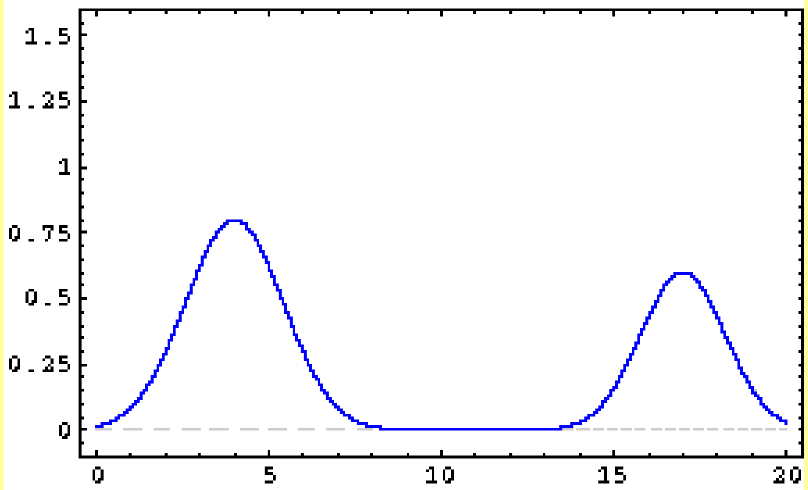
Pulso que viaja a la izquierda

$$y_2(x,t) = Be^{-(x+vt+\phi)^2}$$

Luego la interferencia de los pulsos con forma "Gaussiana" será:

$$\boxed{Y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)}$$

$$Y(x,t) = Ae^{-(x-vt+\delta)^2} + Be^{-(x+vt+\phi)^2}$$



Observamos que los dos pulsos se atraviesan sin deformarse y el desplazamiento neto de los puntos en la cuerda es simplemente la suma de los dos desplazamientos individuales.

Debemos mencionar que estamos considerando que la cuerda es un medio no dispersivo de modo que los pulsos viajan a través de ella sin deformarse. De igual modo al ser un medio no dispersivo la velocidad de cada onda (tren de onda) no depende de su frecuencia.
Si el medio fuese dispersivo entonces los pulsos al interferir podrían cambiar su forma.

$$Y(x,t) = Ae^{-(x-vt+\delta)^2} + Be^{-(x+vt+\phi)^2}$$

1) Interferencia de dos trenes de ondas de una misma amplitud que viajan hacia la derecha sobre una cuerda tensa y que estan desfasados en ϕ = Cte.

$$y_1(x,t) = y_m\, Sen[kx - wt]$$

$$y_2(x,t) = y_m\, Sen[kx - wt - \phi]$$

$$Y(x,t) = y_1 + y_2$$

Ver pizarra

$$Y(x,t) = \Big(2y_m Cos[\phi/2]\Big) Sen[kx - wt - \phi/2]$$

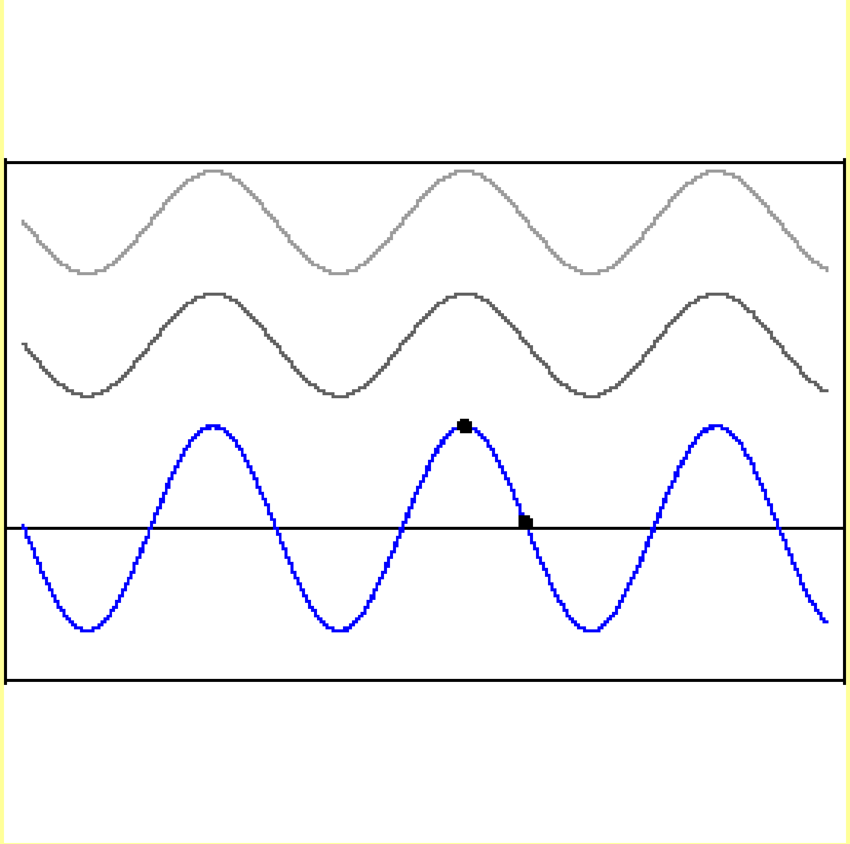
La superposición corresponde a una onda viajera hacia la derecha que viaja con la misma velocidad que las ondas que la componen pero cuya amplitud dependerá de la diferencia de fase entre las ondas que la componen.

Podemos notar que dependiendo de la fase ϕ la interferencia será constructiva o destructiva

$\phi = 0$ Interferencia constructiva

$\phi = \pi$ Interferencia destructiva

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$



En esta animación se consideró una diferencia de fase que cambia con el tiempo, de manera de observar los diferentes tipos de interferencia.

2) Ondas estacionarias I: Interferencia de dos trenes de ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud que viajan en sentidos contrarios en una cuerda tensa.

$$y_1(x,t) = y_m\, Sen[kx - wt]$$

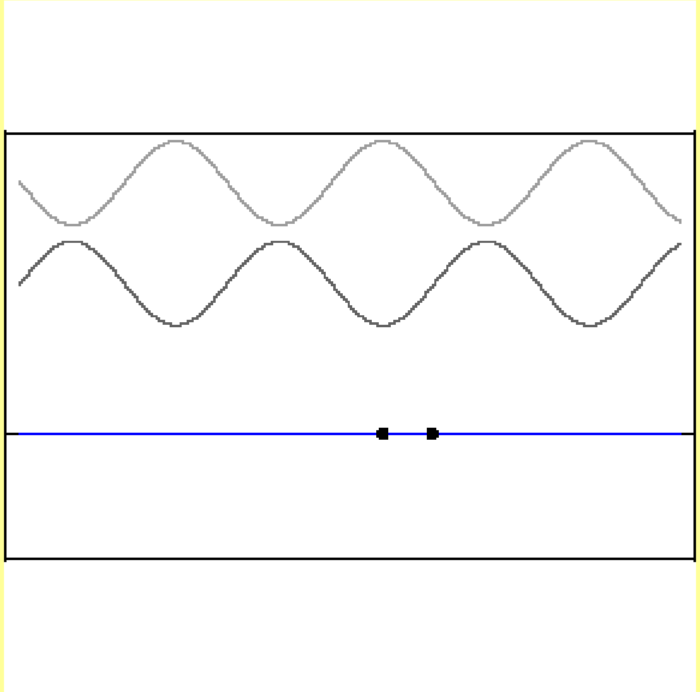
$$y_2(x,t) = y_m\, Sen[kx + wt]$$

$$Y(x,t) = y_1 + y_2$$

Resultado

$$Y(x,t) = 2y_m\, Sen[kx]\, Cos[wt]$$

Ver pizarra



Cada punto de la cuerda simplemente oscila con una misma frecuencia ω. Es decir realiza un movimeinto armónico simple con frecuencia ω.
La amplitud de oscilación dependera de la posición del punto en la cuerda. Hay puntos donde la oscilación es máxima (Antinodos) y hay puntos donde la oscilación tiene amplitud cero (nodos), ver animación.

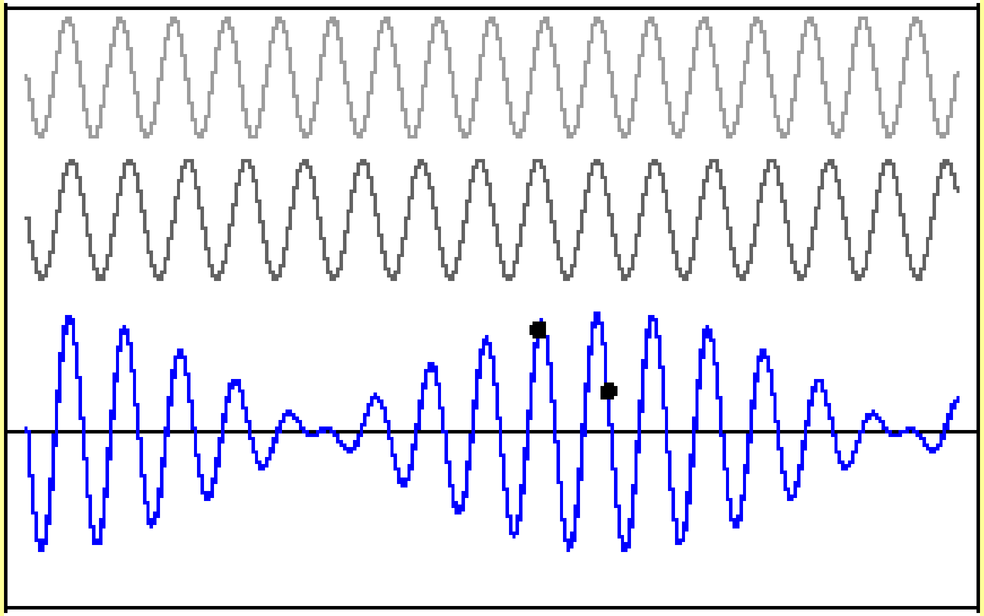
Luego tenemos que la superposición de estos dos trenes de onda genera una onda estacionaria. No hay propagación ni hacia la derecha ni hacia la izquierda.

2) <u>Batidos (pulsaciones)</u>: Interferencia de dos trenes de ondas armónicas de diferente frecuencia pero igual amplitud que viajan en el mismo sentido y con la misma velocidad. Por ejemplo en una cuerda tensa.

$$Y(x,t) = y_m \, Sen[k_1 x - w_1 t] + y_m \, Sen[k_2 x - w_2 t]$$

$$Y(x,t) = \underbrace{2y_m \, Cos\left[\frac{(k_1 - k_2)}{2}x - \frac{(w_1 - w_2)}{2}t\right]}_{\text{Envolvente}} Sen\left[\frac{(k_1 + k_2)}{2}x - \frac{(w_1 + w_2)}{2}t\right]$$

Ver pizarra



El resultado de esta interferencia es el producto de dos ondas viajeras. Una es una función Seno que oscila con frecuencia

$$w_+ = \frac{(w_1 + w_2)}{2}$$

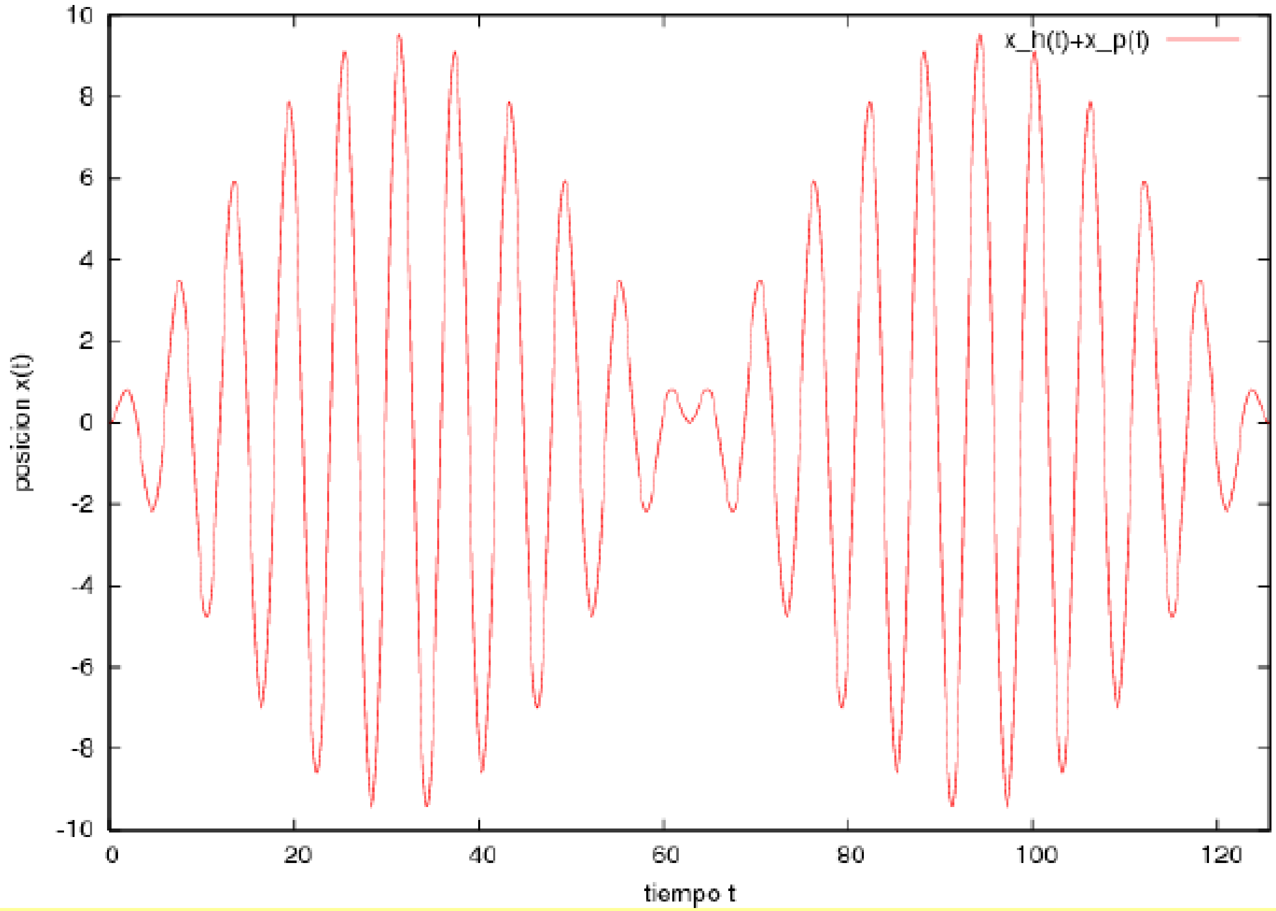
Esta es la frecuencia que “escuchamos”

El otro término es un Coseno que oscila con frecuencia

$$w_- = \frac{(w_1 - w_2)}{2}$$

Este término controla la amplitud de la envolvente de la onda total y es el responsable de los pulsos que “escuchamos”.

¿cuánto vale la frecuencia de los pulsos?


x_h(t)+x_p(t)
posicion x(t)
tiempo t
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0
20
40
60
80
100
120

Fin