Ondas Electromagnéticas

MaríaAntonella Cid
Física III UBB

14 de octubre 2010

Los fenómenos eléctricos y magnéticos pueden compilarse en cuatro ecuaciones fundamentales, las cuales se denominan ecuaciones de Maxwell en honor al físico escocés James Clerk Maxwell quien publicó estas ecuaciones por primera vez en 1865.

Las ecuaciones de Maxwell son el resultado de años de investigación de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Maxwell no dedujo cada una de las ecuaciones pero logró que éstas ecuaciones fueran completamente consistentes entre sí y notó que como solución a este conjunto de ecuaciones diferenciales el campo eléctrico y el campo magnético se comportaban como una onda y predijo entonces la existencia de las ondas electromagnéticas.

En este apunte se muestra una derivación sencilla para obtener ondas electromagnéticas a partir de las ecuaciones de Maxwell. Se hace uso de un apéndice donde se muestran algunas relaciones básicas del cálculo vectorial.

Ecuaciones de Maxwell

Podemos escribir las ecuaciones de Maxwell en su forma integral en términos de la carga eléctrica q y la corriente eléctrica I como:

$$
\begin{aligned}
\text{Ley de Gauss} \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\
\text{Ley de Gauss} \qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} &= 0 \\
\text{Ley de Inducción de Faraday} \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} &= -\frac{d\Phi_b}{dt} \\
\text{Ley de Ampere-Maxwell} \qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} &= \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}
\end{aligned}
$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico y $\vec{B}$ es el campo magnético, $d\vec{A}$ es un diferencia de área y $d\vec{s}$ un diferencial de línea. $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$ se denomina flujo de campo eléctrico y $\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A}$ flujo de campo magnético. ϵ_0 es una constante denominada permitividad del vacío cuyo valor es 8.85×10^{-12} [$\mathrm{C}^2/(\mathrm{Nm}^2)$] y μ_0 es la constante denominada permeabilidad del vacío cuyo valor es $4\pi\times10^{-7}$ [Tm/A].

Conservación de la carga eléctrica

La conservación de la carga eléctrica establece que la tasa temporal de cambio de la carga total encerrada en un volumen V debe igualar la corriente neta fluyendo a través de la superficie que rodea dicho volumen:

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \rho dV$$

donde $\vec{J}$ es la densidad de corriente definida de modo que $dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$ y ρ es la densidad volumétrica de carga definida mediante $dq = \rho dV$.

Del teorema de la divergencia tenemos $\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int (\nabla \cdot \vec{J}) dV$, luego podemos expresar la conservación de la carga en términos de una ecuación diferencial como:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

Ley de Ampere

La ley que Ampere encontró originalmente en términos de la densidad de corriente indicaba que un campo magnético en movimiento generaba una corriente eléctrica:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Usando el teorema de Stokes: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$ podemos reescribir la ley de Ampere en términos de una ecuación diferencial como:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{2}$$

Inconsistencia de la ley de Ampere y la conservación de la carga

Maxwell notó que la ley de Ampere no era completamente consistente con la conservación de la carga.

Si tomamos el rotor de la Ec.(2) tenemos (Id. 15 del apéndice):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

donde este último resultado viene de la Ec.(1). La ley de Ampere sólo se satisface en situaciones en las cuales la densidad de carga es constante. Esto excluiría muchos casos interesantes estudiados en electromagnetismo como por ejemplo un capacitor que se carga y descarga.

Ley de Gauss

Podemos escribir la ley de Gauss para el campo eléctrico en términos de la densidad de carga como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

Mediante el teorema de la divergencia, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int (\nabla\cdot\vec{E})dV$ podemos reescribir la ley de Gauss como una ecuación diferencial:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{3}$$

Tomando una derivada temporal de esta ecuación obtenemos: $\epsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$.

Maxwell notó que había dos formas de dar origen a un campo magnético, mediante una densidad de corriente $\vec{J}$ y mediante un término $\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ que se denominó corriente de desplazamiento.

La ley de Ampere se modificó incluyendo el nuevo término denominándose ahora ley de Ampere-Maxwell:

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{4}$$

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Haciendo uso del teorema de la divergencia y del teorema de Stokes podemos reescribir las ecuaciones integrales del electromagnetismo como ecuaciones diferenciales:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{7}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{8}$$

Los términos q y $\vec{J}$ no aparecen puesto que estamos en el vacío.

Si tomamos el rotor de la Ec.(7) (ver Id.17 del apéndice) y consideramos la Ecs.(5) y (8) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B}) \\
\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \\
\nabla^2\vec{E} &= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad (9)
\end{aligned}$$

Esta última ecuación corresponde a una ecuación de onda para el vector campo eléctrico donde la velocidad de propagación de estas ondas está dada por $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, la velocidad de la luz en el vacío. ∇^2 representa el operador laplaciano, si el campo eléctrico sólo depende de la coordenada x y del tiempo ($\vec{E} = \vec{E}(t,x)$) entonces $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Análogamente, tomando el rotor de la Ec.(8) y considerando la Ecs.(6) y (7) obtenemos:

$$\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \tag{10}$$

Solución a la ecuación de onda

La solución general a la Ec.(9) es de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi)$$

donde $\vec{E}_m$ es la amplitud de la onda, $\vec{k}$ se denomina vector de onda y equivale al número de onda en el caso de una onda que se propaga en una sola dimensión (ondas en una cuerda, ondas de sonido en un tubo). El vector $\vec{k}$ indica la dirección en la cual se propaga la onda y $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ corresponde al vector posición. Si la onda se propaga a lo largo del eje x entonces $\vec{k} \cdot \vec{r} \ \rightarrow kx$. ϕ es la constante de fase.

Chequeando esta solución para $\vec{E}$ en las Ecs.(5) y (7) obtenemos algunas propiedades de esta onda.

Usando las propiedades 18 y 20 del apéndice y el hecho de que $\vec{E}_m$ y $\vec{k}$ son constantes:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= -\vec{E}_m \cdot [\nabla(\vec{k} \cdot \vec{r})] \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) \\
\nabla \cdot \vec{E} &= -\vec{E}_m \cdot [(\vec{k} \cdot \nabla)\vec{r} + \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{r})] \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) \\
\nabla \cdot \vec{E} &= -\vec{E}_m \cdot \vec{k} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi)
\end{aligned}$$

Dado que las ecuaciones de Maxwell indican $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ en el vacío, entonces tenemos $\vec{E}_m \cdot \vec{k} = 0$ es decir el vector campo eléctrico $\vec{E}$ y el vector de onda $\vec{k}$ son perpendiculares entre sí (puesto que $\vec{E}$ y $\vec{E}_m$ tienen las misma dirección). Note que $\nabla \times \vec{r} = 0$.

Por otra parte, usando las propiedades 19 y 20 del apéndice:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -[\nabla(\vec{k} \cdot \vec{r})] \times \vec{E}_m \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) \\
\nabla \times \vec{E} &= -\vec{k} \times \vec{E}_m \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) \qquad (11)
\end{aligned}$$

Dado que las ecuaciones de Maxwell indican $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \int \vec{k} \times \vec{E}_m \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) dt \\
\vec{B} &= \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}_m) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \qquad (12)
\end{aligned}$$

donde hemos usado la relación 21 de l apéndice.

De la Ec.(12) notamos que $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{E}$ y perpendicular a $\vec{k}$ (debido a la definición de producto cruz). Además, tomando el módulo de esta ecuación (dado que $\vec{k}$ y $\vec{E}$ son perpendiculares) notamos que:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{k}||\vec{E}|}{\omega} = \frac{|\vec{E}|}{c} \qquad (13)$$

En resumen, las ondas electromagnéticas consisten de un campo eléctrico y un campo magnético oscilantes perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Ambos campos oscilan en fase y la razón entre el campo eléctrico y el campo magnético en todo momento es igual a c, la velocidad de propagación de estas ondas en el vacío.

Apéndice: Resumen de cálculo vectorial

- $\nabla\cdot$ denota el operador diferencial divergencia y $\nabla\times$ denota el operador diferencial rotor, ambos operan sobre campos vectoriales (o vectores). ∇ denota el operador diferencial gradiente y opera sobre funciones escalares.

- $\cdot$ denota producto punto (también se denomina producto escalar o producto interior). $\times$ denota producto cruz (también se denomina producto vectorial). Ambos tipos de producto operan sobre vectores, el primero da como resultado un número y el segundo da como resultado un vector.

  Sean $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$, luego:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\
\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}
\end{aligned}$$

- Divergencia y rotor (en coordenadas cartesianas) para $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \\
\nabla\times\vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}
\end{aligned}$$

- dV, $d\vec{A}$, $d\vec{s}$ denotan diferencial de volumen, de área y de línea respectivamente. $\oint$ denota una integral a lo largo de una trayectoria cerrada o para una superficie cerrada.

- Teorema de la divergencia o teorema de Gauss:

$$\int(\nabla\cdot\vec{F})dV = \oint\vec{F}\cdot d\vec{A}$$

- Teorema de Stokes

$$\int(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{A} = \oint\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

- Identidades del cálculo vectorial

$$\nabla\times\nabla\phi = 0 \tag{14}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 \tag{15}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi \ : \ \text{laplaciano} \tag{16}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \tag{17}$$

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\vec{A} \tag{18}$$

$$\nabla\times(\phi\vec{A}) = \phi\nabla\times\vec{A} + \nabla\phi\times\vec{A} \tag{19}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) \tag{20}$$

$$(\phi\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(\phi\vec{B}) = \phi(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{21}$$