

UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS HAMILTONIANOS

Claudio Vidal

Marzo, 2016

ÍNDICE GENERAL

Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Teoremas y definiciones básicas	9
1.2. Simetrías	12
1.3. Estabilidad en el sentido de Liapunov	15
1.4. Una visión de los problemas de interés	17
1.5. Ejemplos	17
2. Sistemas Hamiltonianos	26
2.1. Formulación abstracta de los sistemas Hamiltonianos	28
2.2. Formulación geométrica de los campos vectoriales Hamiltonianos	31
2.3. Formulación Lagrangiana	32
2.4. Sistemas Hamiltonianos lineales	33
2.5. Sistemas mecánicos	35

2.6.	Ejemplos de sistemas Hamiltonianos	37
2.7.	El problema restringido circular de tres cuerpos	39
2.7.1.	Cálculo de las soluciones de equilibrio	42
2.8.	Estudio cualitativo de algunos sistemas Hamiltonianos	47
3.	Transformaciones simplécticas	56
3.1.	Matrices simplécticas	56
3.1.1.	Espectro de una matriz simpléctica	59
3.2.	Transformaciones simplécticas	59
3.3.	Teorema de Floquet para sistemas Hamiltonianos	62
3.4.	El corchete de Poisson	63
3.5.	El teorema del flujo tubular	64
3.6.	Ejemplos de transformaciones simplécticas	67
3.7.	Ecuaciones variacionales	79
3.8.	Funciones generadoras	80
3.8.1.	Ejemplos de funciones generadoras	82
3.9.	Diferentes coordenadas simplécticas en el problema de los n -cuerpos	84
3.9.1.	El problema de los n -cuerpos en coordenadas rotatorias	84
3.9.2.	El problema de los n -cuerpos en coordenadas de Jacobi	85
3.10.	Coordenadas de McGehee o blow-up	87
4.	Espacios simplécticos y caracterización de las matrices Hamiltonianas y de las matrices simplécticas	92
4.1.	Espacios simplécticos	92
4.2.	Caracterización de las matrices Hamiltonianas y de las matrices simplécticas	100

5. Formas canónicas para matrices Hamiltonianas	106
5.1. Caso 1: autovalores reales no nulos	108
5.2. Caso 2: autovalores complejos no imaginários puros	109
5.3. Caso 3: autovalores nulos	109
5.4. Caso 4: autovalores imaginarios puros	121
6. Caracterización y algoritmos para la forma normal de la parte cuadrática	138
6.1. Caracterización de la parte cuadrática debido a V. Arnold	138
6.2. Algoritmos para el cálculo de la forma normal de Hamiltonianos cuadráticos debido a A. Markeev	140
6.2.1. Análisis del caso de raíces simples y imaginarias puras	141
6.2.2. Aplicación al problema restringido circular de los tres cuerpos	144
6.2.3. Análisis del caso donde A depende periódicamente de t	147
6.3. Forma normal en el caso de autovalores imaginários puros debida a N. Burgoyne y R. Cushman	151
6.3.1. Aplicación al problema restringido circular de tres cuerpos	154
6.4. Normalización de la parte cuadrática del Hamiltoniano en el caso de autovalores distintos debida a Birkhoff	156
6.5. Análisis del caso de frecuencias nulas para dos grados de libertad	157
7. Formas normales para sistemas Hamiltonianos no lineales	160
7.1. La forma normal de Gustavson y de Birkhoff para sistemas Hamiltonianos	160
7.1.1. Definiciones básicas	162
7.1.2. Aplicación al problema restringido circular de los tres cuerpos en el caso planar	164
7.1.3. Forma normal de Gustavson en el caso autónomo	165
7.1.4. Extensión de la forma normal de Gustavson al caso no autónomo	175

7.1.5. Aplicaciones	180
7.2. La forma normal de Lie o método de Deprit-Hori	184
7.3. Cambio de coordenadas simplécticas próxima de la identidad	184
7.4. Algoritmo	185
7.5. Unicidad de la forma normal	192
7.6. Forma normal en un equilibrio	193
7.6.1. Caso donde la parte lineal es semisimple	193
7.6.2. El caso general de una matriz Hamiltoniana	197
7.6.3. Aplicaciones del método de Lie	199
7.7. El método de Lie en el caso no autónomo	203
7.7.1. Análisis del caso periódico	206
8. Estabilidad	209
8.1. Consideraciones	209
8.1.1. Reducción del número de grados de libertad	210
8.1.2. Teorema de la Curva Invariante	211
8.2. Estabilidad de equilibrios en sistemas Hamiltonianos lineales	216
8.2.1. Caso autónomo	216
8.2.2. Aplicación al problema restringido de tres cuerpos en el caso planar	216
8.2.3. Caso periódico	219
8.3. Estabilidad para sistemas Hamiltonianos casi lineales	221
8.4. El método directo de Liapunov	222
8.5. Análisis del caso autónomo	222
8.5.1. El método directo de Liapunov en el caso de estabilidad	226

8.5.2.	Método directo de Liapunov en el caso de inestabilidad	228
8.5.3.	El método de Chetaev	231
8.6.	Análisis del caso no autónomo	236
8.6.1.	El método directo de Liapunov para decidir estabilidad	238
8.6.2.	El método directo de Liapunov para decidir inestabilidad	240
8.6.3.	Criterio de Chetaev para inestabilidad	242
8.7.	Estabilidad de soluciones de equilibrio para sistemas Hamiltonianos con un grado de libertad	245
8.7.1.	Criterios de estabilidad	246
8.7.2.	Aplicaciones	250
8.8.	Estabilidad de soluciones de equilibrio en sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad, en el caso autónomo	252
8.8.1.	Teorema de Arnold	252
8.8.2.	Generalización del Teorema de Arnold	258
8.9.	Aplicación al problema restringido de los 3-cuerpos	265
8.10.	Estabilidad de soluciones de equilibrio en sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad, en el caso periódico	269
8.10.1.	Estabilidad bajo única resonancia de tercera orden	269
8.10.2.	Estabilidad bajo única resonancia de cuarta orden	271
8.11.	Una nota sobre el caso periódico	274
9.	Soluciones periódicas	276
9.1.	Método de la Continuación de Poincaré	276
9.1.1.	Soluciones periódicas con período fijo	277
9.1.2.	Soluciones periódicas de período variable	278

9.1.3.	Soluciones periódicas dependiendo del parámetro perturbador	279
9.1.4.	Sistema no perturbado lineal	280
9.1.5.	El método de la continuación en el caso autónomo bajo la existencia de integrales primeras	283
9.1.6.	El método de la continuación para sistemas Hamiltonianos autónomos dependiendo de un parámetro	290
9.1.7.	Aplicación al problema restringido de 3-cuerpos	295
9.2.	Teorema del Centro de Liapunov	299
9.2.1.	El teorema de Liapunov en el caso general	300
9.2.2.	El teorema del Centro de Liapunov en el caso Hamiltoniano	305
9.2.3.	Aplicación al problema restringido de los tres cuerpos	306
9.3.	El método sub-armónico de Melnikov	310
9.3.1.	Teorema de Melnikov	311
9.3.2.	Aplicaciones	315

Bibliografía

321

INTRODUCCIÓN

Parte de este libro sobre *SISTEMAS DINÁMICOS HAMILTONIANOS* comenzó a ser escrito en Recife, Brasil por el autor durante el segundo semestre del año 2003, período en el cual dictó la asignatura con el mismo nombre. Las notas surgieron de forma natural, una vez que el grupo de investigación en esta área ha crecido mucho en los últimos años. Por tal motivo, la palabra "natural" significa simplemente escribir aquello que los estudiantes del área necesitan saber y conocer en un primer curso de Sistemas Dinámicos Hamiltonianos. Estas notas fueron mejoradas en el año sabático (noviembre 2004 hasta agosto de 2005) del autor en la Universidad Autónoma Metropolitana de México (UAM). La actual versión ha sido completada por el autor en su actual lugar de trabajo, DMAT-UBB, con la ayuda de sus alumnos de Postgrado.

Este material se divide en 8 capítulos y en cada capítulo colocamos varias aplicaciones para facilitar la comprensión de los diferentes conceptos y resultados.

En el primer Capítulo 1 hacemos una breve y rápida introducción sobre los asuntos que juzgo esenciales para una buena lectura de estas notas. Generalidades sobre éstos y otros asuntos pueden ser encontrados en [16].

Iniciamos en el Capítulo 2 el estudio de los sistemas Hamiltonianos, colocamos sus diferentes formulaciones analíticas y geométricas. Demostramos una serie de resultados importantes para el análisis de los sistemas Hamiltonianos y en particular estudiamos los sistemas mecánicos, los cuales son un tipo particular, pero muy importante de sistemas Hamiltonianos conservativos.

El Capítulo 3 está orientado a estudiar las transformaciones de coordenadas simplécticas y mostramos su importancia para el estudio de la dinámica de los sistemas Hamiltonianos. Parte de este material surgió de la lectura del libro *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem* [29].

En el Capítulo 4, estudiamos los espacios simplécticos y los espacios Lagrangianos. Parte de este material también puede ser encontrado en [29].

El Capítulo 5 se concentra en la caracterización de las matrices Hamiltonianas y en la forma normal de éstas. En este capítulo usamos parte de la tesis de Maestría de F. Pedreira [34] dirigida por Hildeberto Cabral y en la lectura del artículo *Normal forms for real linear Hamiltonian systems with purely imaginary eigenvalues* [5] además de apuntes tomados de los cursos dictados por Hildeberto Cabral en la Post-Graduación.

Exponemos en el Capítulo 6, la forma normal de Hamiltonianos no lineales. Para ésto trabajamos con el método de Gustavson; Birkhoff y más generalmente con el método de Deprit-Hori-Lie. Parte de este material también puede ser encontrado en [29] y otra referencia para estos tópicos es [10].

En el Capítulo 7 hacemos un estudio detallado sobre estabilidad de soluciones de equilibrio en sistemas Hamiltonianos. Para ésto, enunciamos y probamos los resultados debidos a *Liapunov* y *Chetaev*. También usamos el *Teorema de la curva invariante de Moser* para probar los Teoremas de Arnold y un resultado reciente debido a H. Cabral y K. Meyer [8]. Parte de estas notas son de apuntes tomados en los cursos dictados por Hildeberto Cabral en la Post-Graduación y del libro de A. Markeev [26]. Otra referencia importante para este capítulo es [9].

En el Capítulo 8 abordamos el estudio de la existencia de soluciones periódicas. Mostramos algunos métodos que nos permiten encontrar soluciones periódicas y principalmente damos bastante énfasis al *Método de la continuación de Poincaré*, al *Teorema del Centro de Liapunov*, cuya demostración fue extraída de [7] y por último al *Método de Melnikov* cuya demostración presentada fue obtenida de [27] y se debe a H. Cabral [7].

Agradezco al Departamento de Matemáticas de la UAM-Iztapalapa por la hospitalidad y a los alumnos que participaron de este curso.