



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

**FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**



**TEXTO GUÍA DE CÁLCULO 1
PARA INGENIERÍA**

*Proyecto financiado por el Fondo de Desarrollo para la Docencia
(FDD2009-07), Vicerrectoría Académica-Dirección de Pregado.*

Profesores Juan Carlos Vega y Claudio Vidal

Concepción, 2010.

PRESENTACIÓN

Cálculo 1 o Cálculo Diferencial es una asignatura de formación básica y en este curso inicial se entrega una herramienta muy importante del Cálculo, el concepto de límite y de derivada, los cuales son de mucha utilidad en diversas aplicaciones. Además ella es requisito esencial de todo el resto de las asignaturas de Cálculo. Por lo tanto, un buen desempeño y una buena comprensión de los contenidos de la misma, implican en un mejor aprovechamiento de las asignaturas posteriores.

Este texto de Cálculo 1 está escrito y dirigido al lector que comienza el ciclo básico en la universidad, de tal forma de incluir tópicos que dicen relación a asuntos preliminares y/o recordar propiedades básicas durante el transcurso de los contenidos, de esta forma estas notas de curso también tendrán como objetivo introducir tópicos de nivelación pero con contenidos propios de la asignatura, con el objetivo de mostrar directamente su importancia y relación con los temas de la asignatura.

Deseamos puntualizar que los resultados esperados como producto de estas notas de curso son:

- Mejorar los índices de aprobación.
- Mejorar la atención de los alumnos en aulas.
- Mejorar la participación de los alumnos en aulas.
- Mantener la atención de los alumnos en aulas.
- Evitar la dispersión del alumno en el proceso enseñanza-aprendizaje.
- Motivar el espíritu crítico de los alumnos en relación a la forma de aprender y entender los contenidos matemáticos.
- Estimular el pensamiento lógico. Reforzar debilidades de los alumnos en relación a contenidos matemáticos preliminares de la asignatura.
- Suplir deficiencias de los alumnos en los diferentes tópicos de la asignatura. Dirigir el estudio de los alumnos en los tópicos verdaderamente importantes en su formación.
- Posibilitar una auto-evaluación del alumno en cada tópico de la asignatura.

- Colocar este texto a disposición de los estudiantes de la Universidad del Bío Bío.

Para cumplir con los objetivos propuestos dividimos el texto en 6 capítulos. Inicialmente introducimos notaciones y símbolos que serán usados con mucha frecuencia durante el texto o que aparecen con frecuencia en el lenguaje matemático. El Capítulo 1 está orientado a recordar y estudiar propiedades importantes de los números racionales y de los números reales. En el Capítulo 2 abordamos el estudio de las funciones reales, así como sus propiedades. El concepto y las propiedades del concepto de límite de función es incorporado en el Capítulo 3. El Capítulo 4 está orientado al estudio de las funciones continuas. La derivada de una función, sus principales propiedades y reglas son estudiadas en el Capítulo 5.

También nos gustaría decir que este es un texto preliminar, no exhaustivo (ya que existen algunos tópicos no considerados aquí o existen tópicos que pueden ser tratados con mayor profundidad), ni acabado. De hecho, pueden existir pequeños errores y aspectos que mejorar y en tal sentido, agradezco desde ya, al lector para que me haga llegar sus valiosas sugerencias.

Notaciones y símbolos

Los símbolos matemáticos se utilizan con el objetivo de evitar escrituras inmensas. Algunos símbolos importantes son:

\exists existe.

$\exists!$ existe único.

\forall para todo.

\vee o.

\wedge y.

$<$ menor que.

$>$ mayor que.

\leq menor o igual a.

\geq mayor o igual a.

\subset subconjunto de.

\subsetneq subconjunto propio de.

\approx aproximado o aproximadamente.

\Rightarrow implica o condición necesaria.

\Leftarrow condición suficiente.

\Leftrightarrow si y sólo si, o condición equivalente o condición necesaria y suficiente.

$:=$ por definición.

Sean A, B subconjuntos de X :

$$A \cup B = \{x \in X / x \in A \vee x \in B\}.$$

$$A \cap B = \{x \in X / x \in A \wedge x \in B\}.$$

$$A^c = \{x \in X / x \notin A\}.$$

$$A \setminus B = \{x \in X / x \in A \vee x \notin B\}.$$

En matemática se utiliza con mucha frecuencia el alfabeto griego para denotar números, o parámetros. A continuación presentamos las letras minúsculas y entre paréntesis encontrarás las mayúsculas, cuando corresponda.

α , alfa.

β , beta.
 γ , gamma (Γ).
 δ , delta (Δ).
 ϵ , epsilon.
 ε , varepsilon.
 ζ , zeta.
 η , eta.
 θ , teta (Θ).
 ϑ , varteta.
 ι , iota.
 κ , kapa.
 λ , lambda (Λ).
 μ , mu.
 ν , nu.
 ξ , si (Ξ).
 π , pi (Π).
 ϖ , varpi.
 ρ , ro.
 ϱ , varro.
 σ , sigma (Σ).
 ς , varsigma.
 τ , tau.
 υ , upsilon (Υ).
 ϕ , phi (se lee fi) (Φ).
 φ , varfi.
 χ , chi.
 ψ , psi (Ψ).
 ω , omega (Ω).

Otra notación que usaremos con mucha frecuencia en estos apuntes es la sigla "i.e." que es la abreviación del latín "id est", que quiere decir "esto es", se usa comúnmente para esclarecer el significado de conceptos poco claros.

Índice general

1. Conjuntos de números	9
1.1. Los números racionales	9
1.2. Los números reales	12
1.2.1. \mathbb{R} es ordenado	16
1.2.2. Intervalos	19
1.2.3. Supremo e ínfimo de un conjunto	20
1.3. Potenciación	22
1.4. Valor absoluto o módulo	27
1.5. Ejercicios	33
2. Funciones	39
2.1. Definiciones y preliminares.	39
2.2. Funciones especiales	40
2.2.1. Ejercicios	44
2.3. Propiedades de las funciones	45
2.4. Álgebra de funciones	47
2.5. Funciones monótonas	48
2.6. Ejercicios	49

2.7. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas	50
2.7.1. Ejercicios	52
3. Límite de funciones	53
3.0.2. Límites Laterales	55
3.0.3. Límite en el infinito	58
3.0.4. Límites Especiales	61
3.1. Problemas resueltos	63
3.2. Ejercicios	64
4. Continuidad	66
4.0.1. Funciones Continuas	66
4.1. Tipos de discontinuidad	69
4.1.1. Discontinuidad evitable	69
4.1.2. Discontinuidad esencial	70
4.1.3. Asíntota oblicua	71
4.2. Ejercicios	71
5. Derivación	73
5.1. La derivada y sus propiedades.	73
5.2. Ejercicios resueltos	83
5.3. Derivadas de orden superior	85
5.3.1. Ejercicios	85
5.4. Derivada de funciones inversas	88
5.4.1. Ejercicios	92

5.5. Implicaciones de la derivada	94
5.5.1. Puntos críticos	94
5.5.2. Consecuencias del Teorema del Valor Medio	99
5.6. Aplicaciones de la derivada	105
5.6.1. Recta tangente a una curva	105
5.6.2. Maximización y minimización	107
5.6.3. Ejercicios	111
5.6.4. Razón de cambio y velocidad	113
5.7. Derivación implícita	119
5.8. Método de L'Hôpital	121
5.8.1. Ejercicios	124